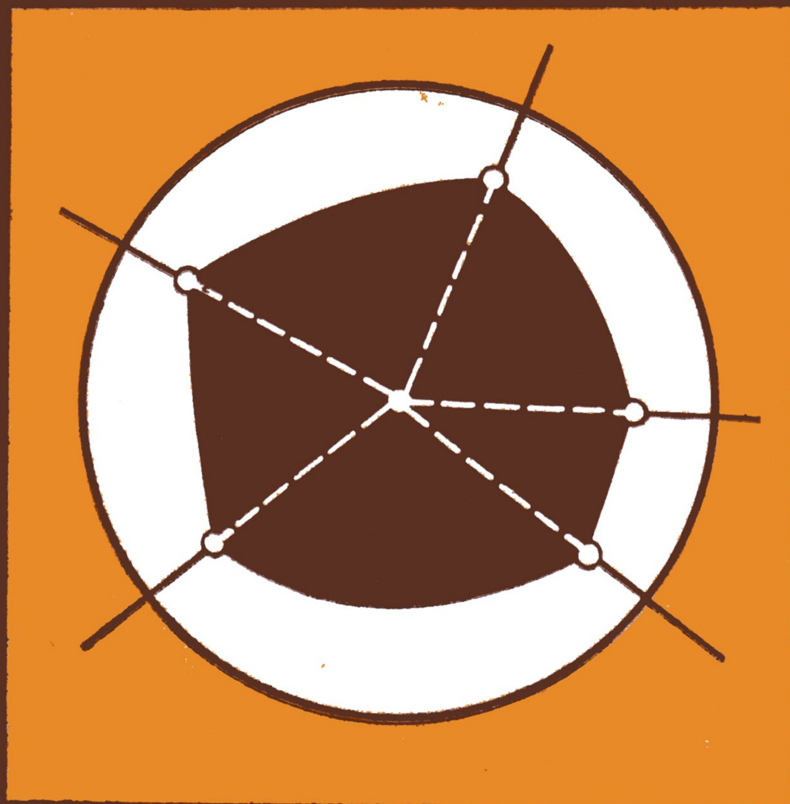
FAKULTATYVINIS KURSAS 10-11

RINKTINIAI MATEMATIKOS KLAUSIMAI





RINKTINIAI MATEMATIKOS KLAUSIMAI

FAKULTATYVINIS KURSAS X—XI KL.

Originalą redagavo V. FIRSOVAS



KAUNAS ŠVIESA 1984

22.1z72
Ri-107

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ
Факультативный курс, X кл.
Авторы: *А. М. Абрамов, Н. Я. Виленкин, Г. В. Дорофеев, А. А. Егоров, А. Н. Земляков, А. Г. Мордкович*
Составитель: *С. И. Шварцбурд*
Москва, «Просвещение», 1980

Vertė PETRAS RUMŠAS

Originalą rekomendavo TSRS švietimo ministerijos Vyriausioji mokyklų valdyba

Ri-107 **Rinktiniai** matematikos klausimai: Fakultatyv. kursas X—XI kl. / A. Abramovas, N. Vilenkinas, G. Dorofejevas ir kt.; Sudarė S. Švarcburdas.— K.: Šviesa, 1984.— 195 p., iliustr.

Aut. nurodyti kn. metrikoje.

Knygoje pateikiama X—XI klasės matematikos fakultatyvinio kurso teorinė medžiaga ir pratimai.

BBK 22.1z72
51(075)

R $\frac{4306020000-999}{M\,853(10)-84}$ 120—84

PRATARMĖ

Tai trečioji fakultatyvinio kurso „Rinktiniai matematikos klausimai“ mokymo priemonių ciklo knyga.

Šioje mokymo priemonėje išdėstytos trys temos: „Diferencialinės lygtys“, „Kompleksiniai skaičiai ir daugianariai“, „Sferinės geometrijos pradmenys“.

Tema „Diferencialinės lygtys“ pagilina IX—XI klasės analizės pradmenų kursą. Pagrindinis šios temos nagrinėjimo tikslas — parodyti mokiniams, kad diferencialinės lygtys yra vienas pagrindinių matematinio gamtos mokslo įrankių, taigi supažindinti juos su realių procesų matematiniu modeliavimu diferencialinių lygčių metodu. Todėl nereikia skirti daug dėmesio įvairiems konkrečių tipų diferencialinių lygčių sprendimo būdams. Svarbu išaiškinti pirmos eilės lygčių geometrinę prasmę ir parodyti, kaip sudaromos diferencialinės lygtys, sprendžiant gamtos mokslų uždavinius. Svarbios praktikai diferencialinės lygtys sprendžiamos pasirinktinai, detaliai aptariant gautų atsakymų fizikinę prasmę. Straipsnyje „Diferencialinės lygtys“ medžiagos yra daugiau negu reikia. Todėl mokytojas savo nuožiūra gali pasirinkti ką nagrinėti. Tačiau kiekviename užsiėmimų variante turi būti šie skyreliai: 1—6, 8 (įvadinė dalis ir 1 pavyzdys), 13—17, 20, 25. Nuo turimo laiko ir grupės sudėties priklauso, kuriomis kryptimis mokytojas papildys šiuos skyrelius. Tos kryptys gali būti kelios, jos apčiuopiamos šiuose skyreliuose: 1) 9; 2) 10 ir 24; 3) 11 ir 19; 4) 12 ir 23; 5) 7; 6) 8, 18, 21 ir 22. Bet kurios krypties galima atsisakyti, nepakenkiant pagrindiniam turiniui; bet kurią kryptį galima pasiūlyti mokiniams, pavedant savarankiškai paruošti pranešimą. Be to, galima nagrinėti ne visus privalomų skyrelių uždavinius.

Tema „Kompleksiniai skaičiai ir daugianariai“ pagilina ir praplečia mokinių žinias apie skaičių sistemas ir algebrinių lygčių sprendimą. Čia daugiausia dėmesio skiriama kompleksinių skaičių teorijos taikymui. Nagrinėjami ir kai kurie „vidiniai“ kompleksinių skaičių teorijos klausimai, pavyzdžiui, kompleksinio kintamojo rodiklinė, logaritminė ir trigonometrinės funkcijos. Straipsnio „Kompleksiniai skaičiai ir daugianariai“ turinio neįmanoma išdėstyti per šiai temai skirtą laiką. Manoma, kad mokytojas atkreips mokinių dėmesį į tuos klausimus, kurie atitinka jų interesus ir pasiruošimo lygį. Tačiau būtina mokiniams parodyti, kad kompleksinių skaičių teoriją galima taikyti, sprendžiant uždavinius, artimus mokykliniam kursui. Tam reikalui straipsnyje

pateikta daug uždavinių su sprendimais. Mokiniai privalo išmokti teorijos bent tiek, kad suprastų pateiktus sprendimus ir patys sugebėtų spręsti panašaus turinio uždavinius. Ugdant mokinių matematinę kultūrą, plečiant jų matematinį akiratį, reikėtų išnagrinėti taikomojo pobūdžio klausimus (§ 4), bet ne visus, o tik kai kuriuos — pagal mokytojo nuožiūrą. Kitą ketvirto paragrafo medžiagą galima pasiūlyti besidomintiems matematika mokiniams skaityti individualiai. Siekiant sudominti mokinius ne tik siauro matematinio pobūdžio klausimais, bet ir platesnio, loginio bei metodologinio pobūdžio problemomis, pravartu atkreipti jų dėmesį į kompleksinių skaičių teorijos kūrimo „subtilumus", išnagrinėtus trečio paragrafo 1 skyrelyje. Antra vertus, kai trūksta laiko, tuos subtilumus galima praleisti.

Tema „Sferinė geometrija" supažindina mokinius su sferos geometrijos pagrindinėmis sąvokomis ir kai kuriais rezultatais. Straipsnio „Sferinė geometrija" turinys tiesiogiai siejasi su programine medžiaga: dėstant kartojami mokiniams žinomi geometrijos kurso teiginiai, taikomos stereometrijos teoremos, plečiamos žinios apie erdvės poslinkius. Straipsnyje įrodytos sferinės geometrijos teoremos supažindina mokinius su kai kuriais įdomiais faktais — Oilerio teorema, negalimumu izometriškai atvaizduoti sferą plokštumoje ir kt. Straipsnyje pateiktos žinios iš sferinės geometrijos įtikinamai rodo, kad jos pritaikomos praktikoje: paskutiniuose paragrafuose sprendžiami paprasčiausi navigacijos ir kartografijos uždaviniai, pateikiama žinių apie kai kurias kartografines projekcijas.

Kiekvienos temos medžiagoje yra daugiau negu reikia uždavinių. Dėl vietos stokos knygoje nėra specialaus skyriaus, skirto bendrojo matematikos kurso sunkiems uždaviniams. Tokių uždavinių mokytojas gali rasti įvairiuose uždavinynuose. Kadangi mokytojas žino savo mokinių polinkius ir pasiruošimą, jis gali savo nuožiūra pasirinkti uždavinius fakultatyviniams užsiėmimams.

DIFERENCIALINĖS LYGTYS

§ 1. RODIKLINIS AUGIMAS IR IŠLYGINIMO PROCESAI

1. Tolygūs ir netolygūs procesai. Gamtoje vykstantys procesai apibūdinami juos apibrėžiančių dydžių ryšiais. Matematiškai dydžių ryšį išreiškia funkcinės priklausomybės sąvoka. Pavyzdžiui, krintančio kūno nueitas kelias s yra praėjusio nuo kritimo pradžios laiko t funkcija: $s=f(t)$. Kelio s priklausomybė nuo t labai sudėtinga — reikia atsižvelgti į oro pasipriešinimą, kuris savo ruožtu priklauso nuo atmosferos slėgio ir temperatūros, nuo krintančio kūno masės, formos bei matmenų ir nuo daugelio kitų faktorių.

Pirmiausia nagrinėjamas suprastintas uždavinys. Todėl tiriamas apytikslis reiškinio modelis: krintantis kūnas laikomas materialiuoju tašku, todėl neatsižvelgiama į jo formą ir matmenis. Jei, be to, tariama, kad oro pasipriešinimo nėra, tai kritimo dėsnis, kaip žinome, yra palyginti paprastas: $s=\frac{gt^2}{2}$ (g — sunkio pagreitis Žemės paviršiuje). Tačiau šios suprastintos formulės neįmanoma taikyti daugeliui praktiškai svarbių procesų. Pavyzdžiui, ja neįmanoma apibūdinti nei parašiutininko kritimo (čia labai svarbu atsižvelgti į oro pasipriešinimą), nei į Mėnulį pasiųstos tarpplanetinės stoties grįžimo (traukos jėga proporcinga atstumui nuo Žemės), nei daugelio kitų procesų.

Vadinasi, realiai vykstantys procesai pernelyg sudėtingi, kad galėtume tiesiogiai taikyti jiems matematinius metodus, o iš per daug suprastintos reiškinio schemos gaunami rezultatai labai netikslūs. Siekiant įveikti šiuos sunkumus, sudaromi keli tiriamo proceso matematiniai modeliai, įgalinantys kaskart tiksliau apibūdinti tiriamą reiškinį ir gauti atsakymus, kuriuos paskui galima lyginti su eksperimentų rezultatais. Tuomet išsiaiškinama, iš kurio modelio gauti atsakymai yra gana tikslūs, ir nusprendžiama, ar tas modelis yra pakankamai paprastas tolesniam tyrimui.

Dažnai paprasčiausias modelis gaunamas, tarus, kad tiriamas procesas vyksta tolygiai. Pavyzdžiui, beveik visuose judėjimo uždaviniuose, kuriuos mokiniai sprendžia, judančių kūnų greitis laikomas pastoviu. Jei dydis y kinta tolygiai ir momentu $t_0=0$ jo

reikšmė buvo lygi y_0, o momentu $t=t_1$ lygi y_1, tai jo reikšmė bet kuriuo momentu t reiškiama formule

$$y=y_0+(y_1-y_0)\frac{t}{t_1}.$$

Po procesų, kurių greitis pastovus, eina procesai su pastoviu pagreičiu — prie jų, pavyzdžiui, priklauso laisvas kūno kritimas netoli Žemės paviršiaus. Šiuo atveju greitis v kinta tolygiai: jei v_0 — pradinis greitis (t. y. greitis momentu $t=0$), o a — pagreitis, tai greitis momentu t lygus v_0+at. Paties dydžio y kitimo laikotarpiu $[t_0, t]$ dėsnis išreiškiamas, kaip parodyta mokymo priemonėje „Algebra ir analizės pradmenys IX—XI klasei", integralu $\int_{t_0}^{t} v(t)dt$. Vadinasi, nagrinėjamu atveju

$$y(t)-y(0)=\int_0^t (v_0+at)dt=v_0t+\frac{at^2}{2}.$$

Jei $y(0)=y_0$, tai

$$y=y_0+v_0t+\frac{at^2}{2}.$$

Išnagrinėtuose pavyzdžiuose greitis arba buvo pastovus, arba kito tolygiai, bet nepriklausė nuo paties kintančio dydžio. Tačiau dažnai dydžio kitimo greičio reikšmė yra susijusi su dydžio reikšme. Pavyzdžiui, kuo didesnis indėlis taupomojoje kasoje, tuo didesnis jo prieaugis per metus; kuo didesnė karvių banda, tuo didesnis jos prieauglis per metus ir t. t. Dažnai teisinga, kad dydžio kitimo greitis momentu t yra apytiksliai proporcingas dydžio reikšmei tuo momentu. Taigi sudarėme tokį matematinį uždavinį.

Uždavinys. *Dydžio y kitimo greitis v kiekvienu momentu proporcingas paties dydžio reikšmei tuo momentu. Reikia rasti dydžio y reikšmę momentu t, tarus, kad jo reikšmė momentu $t=0$ buvo lygi y_0.*

Sprendimas. Iš uždavinio sąlygos žinome, kad $v=ky$. Kadangi $v=y'$, tai gauname diferencialinę lygtį

$$y'=ky. \tag{1}$$

Mokymo priemonėje „Algebra ir analizės pradmenys IX—XI klasei" įrodyta, kad tą lygtį tenkina tik funkcijos $y=Ce^{kt}$. Pagal

uždavinio sąlygą $y=y_0$, kai $t=0$, todėl $y_0=Ce^{k\cdot 0}$, t. y. $C=y_0$. Vadinasi, y reikšmė apskaičiuojama, remiantis formule

$$y=y_0e^{kt}. \qquad (2)$$

Jei proporcingumo koeficiento k reikšmė neduota, o žinoma, kad dydžio y reikšmė, kai $t=t_1$, buvo lygi y_1, tai $y_1=y_0e^{kt_1}$. Todėl

$$y=y_0e^{kt}=y_0\left(e^{kt_1}\right)^{\frac{t}{t_1}}=y_0\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{t}{t_1}}.$$

Ši reikšmė skiriasi nuo reikšmės $y=y_0+(y_1-y_0)\cdot\frac{t}{t_1}$, kurią gavome, tarę, kad dydžio y kitimo greitis yra pastovus.

Nurodžius du bet kokius skaičius t_0 ir y_0, visuomet bus vienas ir tik vienas (1) diferencialinės lygties sprendinys, kurio reikšmė lygi y_0, kai $t=t_0$, būtent sprendinys $y=y_0e^{k(t-t_0)}$, arba, kitaip rašant, $y=y_0e^{-kt_0}\cdot e^{kt}$. Vadinasi, (1) lygtį ir pradinę sąlygą $y(t_0)=$ $=y_0$ vienareikšmiškai atitinka tos lygties sprendinys.

Parodysime, kad išnagrinėto tipo procesus galima apytiksliai pakeisti procesais, kurių greitis pastovus. Tuo tikslu intervalą $[0;\ t]$ padalysime į n lygių dalių ir tarsime, kad dydžio y kitimo greitis kiekviename gautame intervale yra pastovus. Intervale $\left[0;\ \frac{t}{n}\right]$ proceso greitį randame iš formulės $v=y'=ky$, turėdami galvoje, kad $y=y_0$, kai $t_0=0$. Sužinoję, kad $v_0=ky_0$, galime apskaičiuoti apytikslę dydžio y reikšmę taške $\frac{t}{n}$: ji lygi $y_0+v_0\cdot\frac{t}{n}=$ $=y_0+ky_0\cdot\frac{t}{n}$, t. y. $y_1=y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)$. Vėl remdamiesi (1) formule, sužinome apytikslę greičio reikšmę momentu $t_1=\frac{t}{n}$: ji lygi $v_1=$ $=ky_1=ky_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)$. Todėl dydžio y reikšmė momentu $t_2=\frac{2t}{n}$ apytiksliai lygi $y_2=y_1+v_1\cdot\frac{t}{n}=y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)+ky_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)\frac{t}{n}$, t. y. $y_2=y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^2$. Panašiai įsitikiname, kad dydžio y reikšmė momentu $t_m=\frac{mt}{n}$ apytiksliai lygi $y_m=y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^m$. Kai $m=n$, t. y. momentu t, ta reikšmė lygi $y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n$.

Aptartasis metodas yra tik apytikslis, nes dydžio y kitimo greitį kiekviename intervale $\left[\frac{mt}{n};\ \frac{(m+1)t}{n}\right]$ laikome pastoviu. Tačiau didinant šių intervalų skaičių n, intervalai trumpėja, todėl

paklaida, daroma kiekviename intervale, mažėja. Galima įrodyti, kad tuomet ir bendroji paklaida artėja prie nulio, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} y_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n = y_0e^{kt}.$$

2. Rodiklinio augimo procesai. Pirmame skyrelyje išnagrinėtas matematinis modelis pakankamai tiksliai apibūdina daugelį fizinių, cheminių ir biologinių procesų.

1 pavyzdys. Radioaktyviojo skilimo momentinis greitis kiekvienu momentu t proporcingas skylančios medžiagos kiekiui (kuo daugiau yra medžiagos atomų, tuo daugiau jų suskyla). Rasime radioaktyviojo skilimo dėsnį.

Sprendimas. Medžiagos masę momentu t pažymėkime raide m, $m=m(t)$, o skilimo momentinį greitį — raide v. Iš sąlygos aišku, kad $v=-km$, jei k — proporcingumo koeficientas; minuso ženklas rašomas todėl, kad, medžiagai skylant, jos kiekis mažėja, t. y. medžiagos kiekio kitimo greitis yra neigiamas (pabrėžiame, kad parašyta formulė teisinga tik tuo atveju, kai kalbama apie savaiminį skilimą, o ne apie atominį sprogimą).

Kadangi v — medžiagos masės kitimo greitis, t. y. funkcijos $m(t)$ kitimo greitis, tai $v=m'(t)$. Todėl lygybę $v=-km$ galima pakeisti tokia lygybe:

$$m'=-km.$$

Tai (1) tipo lygtis. Jos sprendinys, kaip sakyta anksčiau, yra

$$m=m_0e^{-kt},$$

jei m_0 — pradinė medžiagos masė (momentu $t=0$).

Apskaičiuosime laiką T, per kurį medžiagos masė sumažėja perpus. Tam reikia išspręsti rodiklinę lygtį $e^{-kT}=\frac{1}{2}$. Iš jos sužinome, kad $-kT=\ln\frac{1}{2}$, todėl $kT=\ln 2$ ir $T=\frac{\ln 2}{k}$.

Rasta T reikšmė vadinama radioaktyviosios medžiagos *pusamžiu.* Pusamžis priklauso ne nuo pradinio tos medžiagos kiekio m_0, o nuo atomo branduolio rūšies. Pavyzdžiui, radžio-226 pusamžis lygus 1620 metų, o urano-238 — 4,5 milijardo metų. Fizikoje radioaktyviojo skilimo dėsnis dažniausiai išreiškiamas pusamžiu T:

$$m=m_0e^{-kt}=m_0\left(e^{-kT}\right)^{\frac{t}{T}}=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Vadinasi, gavome tokį radioaktyvios medžiagos skilimo dėsnį:

$$m=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

2 pavyzdys. Tarkime, kad gyvų organizmų kolonija gyvena palankiomis sąlygomis, todėl individų gimsta daugiau negu miršta. Kolonijos užimamą erdvę ir maisto išteklius laikykime neribotais. Be to, tarkime, kad toje erdvėje nėra plėšrūnų, kurie minta tiriamos kolonijos organizmais. Raskime organizmų kiekio priklausomybės nuo laiko dėsnį, kai momentu $t=0$ organizmų skaičius lygus y_0.

Sprendimas. Primename, kad organizmų kiekis visada reiškiamas sveiku skaičiumi. Todėl organizmų kiekis yra trūki laiko funkcija, ir atrodytų, kad šiuo atveju neįmanoma taikyti išvestinės sąvoka pagrįsto modelio. Tačiau, kai organizmų skaičius didelis, tą trūkiąją funkciją pakankamu tikslumu galima pakeisti tolydžia ir net diferencijuojama funkcija ir tirti atitinkamą reiškinio modelį. Jei apskaičiavus paaiškės, kad kolonijos individų skaičius lygus, pavyzdžiui, 125,76, tai suprasime, kad tikrasis individų skaičius apytiksliai lygus 125 ar 126. Dėl to kilusi paklaida bus kur kas mažesnė už paklaidą, atsiradusią dėl pasirinkto modelio netikslumo, koeficientų reikšmių bei pradinių sąlygų negriežtumo ir kitų atsitiktinių priežasčių.

Jei organizmų kiekio y kitimo greitį v laikysime proporcingu tam kiekiui ir tarsime, kad proporcingumo koeficientas lygus α, tai gausime lygybę $v=\alpha y$. Kadangi $v=y'$, tai kolonijos organizmų kiekis y momentu t tenkina lygtį

$$y'=\alpha y.$$

Iš (2) formulės įsitikiname, kad organizmų kiekis išreiškiamas formule

$$y=y_0e^{\alpha t}.$$

Jei $t\to+\infty$, tai funkcija $y_0e^{\alpha t}$ neaprėžtai didėja, nes $\alpha>0$. Todėl tiriamos rūšies individų kiekis neaprėžtai didėja. Pavyzdžiui, netrukdant veistis musėms, jų vienos poros palikuonių masė po dvejų metų būtų didesnė už Žemės masę. Iš tikrųjų tokio greito augimo nėra, nors kai kurios gyvūnų ir augalų rūšys, patekusios į palankias sąlygas, yra dauginęsi taip greitai, kad tapo nelaime (triušiai Australijoje, vandeninis jacintas JAV ir kt.).

Sprendžiant 2 pratimą padarytos prielaidos visapusiškai neapibūdina reiškinio. 9 skyrelyje grįšime prie šio uždavinio, atsižvelgsime į erdvės ribotumą, maisto išteklius, plėšrūnus ir t. t.

3 pavyzdys. Skildami radioaktyvios medžiagos branduoliai išmeta neutronus. Tam tikromis sąlygomis jie patenka į kitus branduolius ir sukelia jų radioaktyvųjį skilimą. Jei neutronų susidaro daugiau negu absorbuojama, tai prasideda grandininė reakcija. Parašysime grandininės reakcijos lygtį, tardami, kad pradžioje buvo n_0 **neutronų**.

Sprendimas. Tarkime, kad atsirandančių neutronų skaičius yra proporcingas jų skaičiui tuo momentu (kuo daugiau laisvų neutronų yra nagrinėjamame tūryje, tuo dažniau jie susiduria su branduoliais ir tuo daugiau atsiranda naujų neutronų). Tai reiškia, kad neutronų kiekio kitimo greitis v tiriamu momentu yra proporcingas jų skaičiui n tuo momentu: $v=kn$, t. y. $n'=kn$. Matome, kad šiam procesui tinka anksčiau išnagrinėtas modelis, todėl atsakymą galima užrašyti šitaip:

$$n=n_0e^{kt}.$$

Kadangi skildamas branduolys išskiria energiją, o skilimų skaičius auga pagal rodiklinį dėsnį, tai tokiu pat greičiu didėja ir išskiriamoji energija — įvyksta branduolinis sprogimas.

Ištyrėme tris procesus, kurių matematinis modelis yra lygtis $y'=ky$. Kadangi šios lygties sprendinys $y=Ce^{kt}$ yra rodiklinė funkcija, tai pati lygtis $y'=ky$ vadinama *rodiklinio augimo lygtimi*. Šiame skyrelyje išnagrinėti (ir į juos panašūs) procesai vadinami rodiklinio augimo procesais.

3. Išlyginimo procesai. Be rodiklinio augimo procesų, kuriuose dydžio kitimo greitis yra proporcingas to dydžio reikšmei, pasitaiko procesų, kuriuose tas greitis yra proporcingas paties dydžio reikšmės ir tam tikros standartinės reikšmės α skirtumui, o proporcingumo koeficientas yra neigiamas. Tokiu atveju $v=-k(y-\alpha)$, $k>0$. Kadangi $v=y'$, tai paskutinę lygybę galima parašyti šitaip:

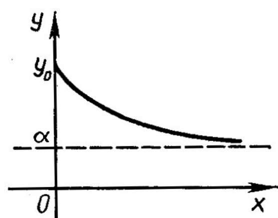
$$y'=-k(y-\alpha). \quad (3)$$

Kad iš tos lygties rastume y, sudarysime naują ieškomą funkciją $z=y-\alpha$. Kadangi $z'=(y-\alpha)'=y'-\alpha'=y'-0=y'$, tai iš (3) lygties gauname lygtį $z'=-kz$. Gautos lygties sprendinys (žr. 1 skyrelį) yra $z=z_0e^{-kt}$. Kadangi $y=z+\alpha$, $z_0=y_0-\alpha$ (y_0 — pradinė ieškomojo dydžio y reikšmė, t. y. reikšmė momentu $t=0$), tai

$$y=\alpha+(y_0-\alpha)e^{-kt}. \quad (4)$$

Kai $t\to+\infty$, funkcija e^{-kt} artėja prie nulio. Todėl laikui bėgant dydžio y reikšmė artėja prie skaičiaus α (1 pav.). Tokie procesai vadinami *išlyginimo procesais*.

4 pavyzdys. Esant tam tikroms sąlygoms, galima tarti, kad įkaitinto kūno temperatūros kitimo greitis yra proporcingas kūno ir jo aplinkos temperatūrų skirtumui ir kad greičio ženklas yra priešingas to skirtumo ženklui. Rasime auštančio kūno temperatūros T priklausomybę nuo laiko t.



1 pav.

Sprendimas. Jei T — kūno temperatūra momentu t, o T_1 — jo aplinkos temperatūra, tai iš uždavinio sąlygos aišku, kad

$$T' = -k(T - T_1).$$

Tai išlyginimo proceso lygtis (plg. su (3) lygtimi). Todėl, remdamiesi (4) formule, gauname

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt};$$

čia T_0 — pradinė kūno temperatūra (tiksliau sakant, uždavinyje kalbama ne apie kūno, bet apie jo paviršiaus temperatūrą).

Laikui bėgant kūno temperatūra artėja prie aplinkos temperatūros T_1. Be to, išlyginimo procesas vyksta tuo greičiau, kuo didesnė koeficiento k reikšmė.

5 pavyzdys. Greitis, kuriuo vyksta sacharozės skaldymasis į fruktozę ir gliukozę, proporcingas sacharozės tirpalo molinei koncentracijai (molis/l). Rasime sacharozės molių kiekio priklausomybę nuo laiko.

Sprendimas. Raide α žymėsime pradinę tirpalo koncentraciją, o raide y — iki momento t suskilusios viename litre tirpalo sacharozės molių kiekį. Tuomet tirpalo koncentracija lygi $\alpha - y$, todėl turime lygybę $v = k(\alpha - y)$. Iš jos išplaukia lygtis

$$y' = -k(y - \alpha).$$

Gavome išlyginimo proceso lygtį, vadinasi,

$$y = \alpha + (y_0 - \alpha)e^{-kt}.$$

Pradiniu momentu (kai $t = 0$) $y = 0$, todėl $y_0 = 0$. Vadinasi, gautą lygties sprendinį galima užrašyti šitaip:

$$y = \alpha - \alpha e^{-kt} = \alpha(1 - e^{-kt}).$$

Iš čia aišku, kad suskilusios sacharozės molių kiekis laikui bėgant artėja prie α.

Pratimai

1. Per 30 dienų suskilo 50% pradinio radioaktyvios medžiagos kiekio. Skilimo greitis kiekvienu momentu proporcingas esamam medžiagos kiekiui. Per kiek laiko liks 1% pradinio kiekio?

2. Radioaktyvios medžiagos pusamžis lygus 1000 metų. Kiek medžiagos liks po 100 metų? po 500 metų? po 2000 metų?

3. Rūgimą skatinančio fermento prieaugio greitis proporcingas jo esamam kiekiui. Pradiniu momentu $t=0$ buvo y_0 kg fermento. Reikia rasti fermento masės priklausomybę nuo laiko.

4. Po 3 h nuo rūgimo pradžios buvo 0,5 kg fermento (žr. 3 pratimą), o po 7 h susidarė 2 kg. Kiek fermento buvo rūgimo pradžioje?

5. Kambaryje, kurio oro temperatūra lygi 20°, kūnas per 20 min ataušta nuo 100° iki 60°. Kūno aušimo greitį laikydami proporcingu kūno ir aplinkos temperatūrų skirtumui, sužinokite, per kiek laiko kūnas atauš iki 30°.

6. Raskite kelią, kurį nueina tiese judantis kūnas per laiką t, kai jo greitis proporcingas iki to momento nueitam keliui ir žinoma, kad per pirmąsias 20 s kūnas nuėjo 400 m, o per tolesnes 15 s — dar 2800 m.

§ 2. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ TEORIJOS PAGRINDINĖS SĄVOKOS

4. Pagrindiniai apibrėžimai. Jau įsitikinome, kad, sprendžiant kai kuriuos fizikos, chemijos ir biologijos uždavinius, reikia mokėti spręsti lygtį $y'=ky$ arba lygtį $y'=k(a-y)$. Tačiau toli gražu ne visada priklausomybė yra tokia paprasta, todėl reikia bendro matematinio aparato, padedančio nagrinėti sudėtingesnius procesus.

Pasirodo, kad iš daugelio gamtos mokslų uždavinių po atitinkamų suprastinimų gauname lygtis, kurios ieškomą funkciją ar keletą ieškomų funkcijų, priklausančių nuo vieno ar keleto argumentų, sieja su pačiais argumentais ir su ieškomų funkcijų įvairių eilių išvestinėmis. Gana dažnai, spręsdami tokį uždavinį, gauname lygtį su nežinoma vieno kintamojo funkcija; tokios lygtys vadinamos paprastosiomis diferencialinėmis lygtimis.

Paprastąja diferencialine lygtimi su viena ieškoma funkcija vadiname lygtį, kuri sieja ieškomos funkcijos išvestines iki kurios nors eilės imtinai ir galbūt pačią funkciją bei nepriklausomą

kintamąjį. Išvestinių, parašytų lygtyje, aukščiausia eilė vadinama *lygties eile.*

Pavyzdžiui, $y'+3x\sin y=x^3$ yra pirmos eilės lygtis, o $(y'')^3+$ $+(y')^2=x^4$ — antros eilės lygtis.

Diferencialinės lygties sprendiniu vadinama kiekviena funkcija, kurią įrašius į lygtį, gaunama tapatybė.

1 pavyzdys. Įsitikinsime, kad funkcija $y=\sin\omega x$ yra diferencialinės lygties $y''+\omega^2y=0$ sprendinys.

Sprendimas. Kadangi $y'=\omega\cos\omega x$, $y''=-\omega^2\sin\omega x$, tai y ir y'' išraiškas įrašę į duotąją lygtį, gauname tapatybę

$$-\omega^2\sin\omega x+\omega^2\sin\omega x=0.$$

Vadinasi, $y=\sin\omega x$ iš tikrųjų yra tos lygties sprendinys. Visiškai panašiai patikrinama, kad funkcija $y=\cos\omega x$ irgi tenkina tą lygtį. Dar daugiau, galima įrodyti (siūlome tai padaryti skaitytojui), kad funkcija $y=C_1\sin\omega x+C_2\cos\omega x$, kai C_1 ir C_2 — bet kurios konstantos, yra diferencialinės lygties $y''+\omega^2y=0$ sprendinys.

Pirmame skyrelyje, išsprendę pirmos eilės lygtį $y'=ky$, gavome begalinę aibę sprendinių $y=Ce^{kx}$ ir matėme, kad kiekvieną sprendinį apibūdina vienos laisvosios konstantos C reikšmė. Išsprendę antros eilės lygtį $y''+\omega^2y=0$, gauname begalinę aibę sprendinių, priklausančių nuo dviejų laisvųjų konstantų C_1 ir C_2. Tai ne atsitiktinumas — galima įrodyti, kad, *išsprendus n-tos eilės lygtį, gaunamas atsakymas su n laisvųjų konstantų; be to, įrodoma, kad tų konstantų skaičiaus neįmanoma sumažinti.* Tokį atsakymą vadiname *n-tos eilės diferencialinės lygties bendruoju sprendiniu.* Laisvąsias konstantas pakeitę konkrečiais skaičiais, gauname *lygties atskirąjį sprendinį.* Pavyzdžiui, rodiklinio augimo lygties $y'=ky$ sprendinyje $y=Ce^{kx}$ vietoj C parašę 5, gauname atskirą sprendinį $y=5e^{kx}$.

Atskirieji sprendiniai dažniausiai apibūdinami kokiomis nors sąlygomis, pavyzdžiui, ieškomos funkcijos ir kai kurių jos išvestinių reikšmėmis proceso pradžioje (pradinės sąlygos) arba jų reikšmėmis dviejuose taškuose (kraštinės sąlygos).

5. Krypčių laukas. Spręsdami praktikoje pasitaikančius uždavinius, gauname įvairiausių diferencialinių lygčių, kurių sprendinių dažniausiai nemokame rasti — nėra algoritmo toms lygtims spręsti. Tokiais atvejais taikome apytikslius diferencialinių lygčių sprendimo metodus. Su vienu tokiu metodu susipažinsime 7 skyrelyje.

Norint išdėstyti to metodo esmę, pirmiausia reikia išsiaiškinti krypčių lauko sąvoką. Sakome, kad nurodytoje plokščioje srityje yra apibrėžtas *krypčių laukas,* jei kiekvienam tos srities taškui yra priskirta kryptis.

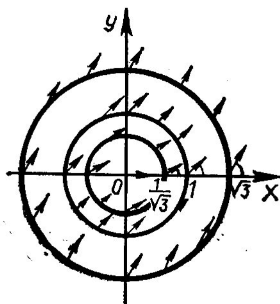
Pavyzdžiui, kai plokštumoje apibrėžtas jėgų laukas (elektrinis ar magnetinis), kiekvieną tašką atitinka vektorius, t. y. kryptis. Taigi jėgų laukas nusako tam tikrą krypčių lauką.

Nusakant krypčių lauką, dažniausiai daroma šitaip: kiekvienam srities taškui $M(x, y)$ priskiriama $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmė, atitinkanti kampą α, kurį lauko kryptis taške $M(x, y)$ sudaro su teigiamąja abscisių ašies kryptimi. Vadinasi, krypčių laukas apibrėžiamas lygybe $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$. Jei, artėjant prie taško $M(x, y)$, funkcijos $f(x, y)$ reikšmė neribotai didėja, tai tame taške lauko kryptis yra vertikali (tangentas neegzistuoja).

2 pavyzdys. Nubraižykime krypčių lauką, reiškiamą formule

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Sprendimas. Taške $M_0(0, 0)$ gauname $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{0^2+0^2}=0$, todėl šiame taške α lygus nuliui, t. y. lauko kryptis šiame taške sutampa su abscisių ašies kryptimi. Taške $M_1(1, 0)$ gauname $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{1^2+0^2}=1$, todėl $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Vadinasi, lauko kryptis taške $M_1(1, 0)$ su abscisių ašimi sudaro kampą $\frac{\pi}{4}$. Tą pačią kryptį laukas turi taškuose $M_2(0, 1)$, $M_3(-1, 0)$ ir apskritai visuose apskritimo $x^2+y^2=1$ taškuose. Panašiai įsitikiname, kad visuose apskritimo $x^2+y^2=3$ (kurio spindulys lygus $\sqrt{3}$) taškuose laukas su abscisių ašimi sudaro kampą $\frac{\pi}{3}$ (nes $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$), o apskritimo $x^2+y^2=\frac{1}{3}$ taškuose — kampą $\frac{\pi}{6}$. Gauti rezultatai pavaizduoti 2 paveiksle.

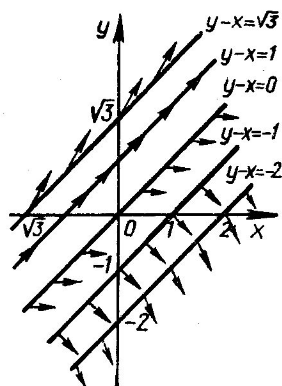


2 pav.

Braižant krypčių lauką, patogu naudoti kreives, kurių visuose taškuose lauko kryptis yra vienoda. Išnagrinėtame pavyzdyje tos kreivės buvo apskritimai su centru koordinačių pradžioje. Kadangi tų apskritimų taškuose lauko kryptis vienoda, tai jie vadinami izoklinėmis (graikiškai „isos" — vienodas, „klinō" — lenkiu).

Apskritai, kai krypčių laukas pateiktas lygybe $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$, izoklinės sudaro šei-

mą kreivių, reiškiamų lygtimis $f(x, y) = C$. Kreivės $f(x, y) = C$ taškuose laukas su teigiamąja abscisių ašies kryptimi sudaro kampą α, kurio tangentas lygus C.



3 pav.

3 pavyzdys. Naudodamiesi izoklinėmis, nubraižykime krypčių lauką, reiškiamą formule $\operatorname{tg}\alpha = y - x$.

Sprendimas. Izoklinės reiškiamos lygtimis $y - x = C$, todėl jos yra tiesės, lygiagrečios pirmo ir trečio koordinatinių kampų pusiaukampinėms (3 pav.). Pačioje pusiaukampinėje, t. y. tiesėje $y - x = 0$, laukas su abscisių ašimi sudaro kampą $\alpha = 0$, tiesėje $y - x = 1$ — kampą $\frac{\pi}{4}$ (nes $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$), tiesėje $y - x = \sqrt{3}$ — kampą $\frac{\pi}{3}$. Tiesėje $y - x = -2$ laukas su teigiamąja abscisių ašies kryptimi sudaro tokį kampą α, kad $\operatorname{tg}\alpha = -2$, t. y. maždaug $115°$ kampą.

Panašiai randamos kryptys kitose izoklinių šeimos tiesėse.

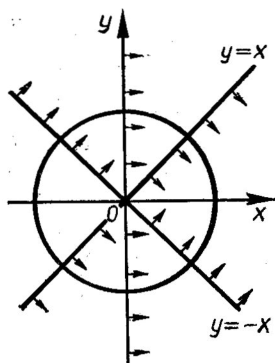
6. Diferencialinės lygties geometrinė prasmė. Atskirojo diferencialinės lygties sprendinio grafikas yra plokštumos kreivė. Ta kreivė vadinama diferencialinės lygties *integraline kreive*. Bendrasis sprendinys yra integralinių kreivių šeima.

Sakykime, kad $y = \varphi(x)$ yra lygties $y' = f(x, y)$ integralinė kreivė, einanti per tašką $M_0(x_0, y_0)$. Į reiškinį $f(x, y)$ įrašę to taško koordinates, gauname skaičių $f(x_0, y_0)$ (tariame, kad funkcija f taške M_0 apibrėžta). Iš diferencialinės lygties aišku, kad tas skaičius yra lygus išvestinės $y' = \varphi'(x)$ reikšmei taške x_0.

Funkcijos $y = \varphi(x)$ išvestinės reikšmė, kai $x = x_0$, lygi tangentui kampo, kurį kreivės $y = \varphi(x)$ liestinė taške M_0 sudaro su abscisių ašimi. Todėl integralinės kreivės liestinės kryptis kiekviename kreivės taške sutampa su lauko $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$ kryptimi. Trumpai sakant, *integralinė kreivė kiekviename savo taške liečia krypčių lauką.*

4 pavyzdys. Nubraižykime lygties $y' = -\frac{x}{y}$ krypčių lauką ir integralines kreives.

Sprendimas. Nagrinėjamo krypčių lauko izoklinės reiškiamos lygtimis $-\frac{x}{y} = C$. Kiekvieną C reikšmę atitinka izoklinė, kurios taškuose lauko kryptis su abscisių ašimi sudaro tokį kam-



4 pav.

pą α, kad $\operatorname{tg}\alpha=C$. Kadangi pati izoklinė yra tiesė $y=-\frac{1}{C}x$, kurios krypties koeficientas lygus $-\frac{1}{C}$, tai krypčių laukas kiekviename taške statmenas izoklinei. Todėl jis yra toks, kokį matome 4 paveiksle.

Integralinės kreivės kiekviename taške turi liesti krypčių lauką, todėl jos turi būti statmenos izoklinėms. Kadangi izoklinės yra tiesės, einančios per koordinačių pradžią, tai joms statmena kreivė gali būti tik apskritimas, kurio centras sutampa su koordinačių pradžia. Vadinasi, nagrinėjamos lygties integralinės kreivės yra apskritimai $x^2+y^2=r^2$.

7. Apytikslis diferencialinių lygčių sprendimas Oilerio metodu. Norint tiksliai nubraižyti integralines kreives, reikia mokėti spręsti diferencialines lygtis. Tai gvildensime 4 paragrafe, o šiame skyrelyje aiškinsime diferencialinių lygčių apytikslio sprendimo metodą, pagrįstą jų geometrine prasme. Su vienu tokio apytikslio sprendimo pavyzdžiu susipažinome 1 skyrelyje, o čia nagrinėsime bendrąjį atvejį.

Sprendžiant apytiksliai diferencialinę lygtį $y'=f(x, y)$, kai nurodyta pradinė sąlyga $y(x_0)=y_0$, daroma šitaip. Pasirinkus žingsnį h, apskaičiuojamas ieškomos funkcijos pokytis intervale $[x_0, x_0+h]$ pagal apytikslę formulę $\Delta y\approx y'(x_0)\cdot h$. Kadangi iš diferencialinės lygties aišku, kad išvestinės reikšmė taške x_0 lygi funkcijos f reikšmei taške $M_0(x_0, y_0)$, t. y. $y'(x_0)=f(x_0, y_0)$, tai minėtą apytikslę lygybę galima parašyti šitaip:

$$\Delta y\approx f(x_0, y_0)\cdot h.$$

Skaičių x_0+h pažymėkime raide x_1, o $y_0+f(x_0, y_0)\cdot h$, t. y. apytikslę y reikšmę taške $x=x_1$, — raide y_1. Paskui tokiu pat būdu apskaičiuokime apytikslę ieškomos funkcijos reikšmę taške $x_2=x_0+2h$:

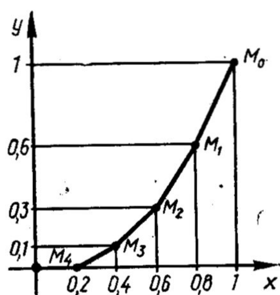
$$y_2=y_1+f(x_1, y_1)\cdot h.$$

Toliau skaičiuojame pagal rekurentinę formulę

$$y_{n+1}=y_n+f(x_n, y_n)\cdot h. \tag{1}$$

Pažymėję plokštumoje taškus $M_k(x_k, y_k)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, ir juos paeiliui sujungę atkarpomis, gausime laužtę, vadinamą

Oilerio laužte, kuri apytiksliai vaizduoja ieškomo sprendinio grafiką. Artinys bus tuo geresnis, kuo mažesnė bus parinkta h reikšmė.



5 pav.

Išdėstytas diferencialinės lygties grafinis apytikslio sprendimo metodas vadinamas *Oilerio metodu.* Primename, kad apibūdinantis laužtės žingsnį skaičius h gali būti ir teigiamas, ir neigiamas.

5 pavyzdys. Duota lygtis $y'=\frac{2y}{x}$ ir pradinė sąlyga $y(1)=1$. Taikydami Oilerio metodą, intervale $[0, 1]$ nubraižykime laužtę, apytiksliai vaizduojančią atskirąjį lygties sprendinį, atitinkantį nurodytą pradinę sąlygą.

Sprendimas. Intervalą $[0, 1]$ padalykime į 5 lygias dalis ir tarkime, kad $x_0=1$; $x_1=0{,}8$; $x_2=0{,}6$; $x_3=0{,}4$; $x_4=0{,}2$. Tokiu atveju $h=-0{,}2$.

Pažymime tašką $M_0(1, 1)$, per kurį turi eiti ieškomoji integralinė kreivė (5 pav.). Surasime kitą laužtės viršūnę $M_1(x_1, y_1)$.

Kadangi $f(x, y)=\frac{2y}{x}$, tai $f(x_0, y_0)=f(1, 1)=2$. Pagal (1) formulę gauname:

$$y_1=y_0+f(x_0, y_0)\cdot h=1-2\cdot 0{,}2=0{,}6.$$

Pažymime tašką $M_1(x_1, y_1)$, t. y. tašką $M_1(0{,}8; 0{,}6)$.

Paskui apskaičiuojame y_2:

$$y_2=y_1+f(x_1, y_1)\cdot h=y_1+\frac{2y_1}{x_1}\cdot h=0{,}6-\frac{2\cdot 0{,}6}{0{,}8}\cdot 0{,}2=0{,}3.$$

Pažymime tašką $M_2(x_2, y_2)$, t. y. tašką $M_2(0{,}6; 0{,}3)$.

Po to apskaičiuojame y_3:

$$y_3=y_2+f(x_2, y_2)\cdot h=y_2+\frac{2y_2}{x_2}\cdot h=0{,}3-\frac{2\cdot 0{,}3}{0{,}6}\cdot 0{,}2=0{,}1.$$

Pažymėję tašką $M_3(0{,}4; 0{,}1)$, apskaičiuojame y_4:

$$y_4=y_3+f(x_3, y_3)\cdot h=y_3+\frac{2y_3}{x_3}\cdot h=0{,}1-\frac{2\cdot 0{,}1}{0{,}4}\cdot 0{,}2=0.$$

Pažymime tašką $M_4(0{,}2; 0)$.

Galų gale nubraižome laužtę $M_0M_1M_2M_3M_4O$ (taškas O laužtei nepriklauso, nes iš nagrinėjamos lygties aišku, kad $x\neq 0$).

Nubraižytoji laužtė šiek tiek panaši į parabolę. Kad integralinė kreivė iš tikrųjų yra parabolė, lengva įsitikinti, suradus

duotos lygties sprendinį tiksliais metodais. Ieškomasis atskiras sprendinys — parabolė $y=x^2$ (žr. 22 d pratimą).

Pratimai

7. Įrodykite, kad nurodyta funkcija yra pateiktos diferencialinės lygties sprendinys:

Funkcija	Lygtis
$y=x^2+x$	$xy'-x^2=y$
$y=xe^x$	$y''+3y'-4y=5e^x$
$y=C_1 \sin 3x+C_2 \cos 3x$	$y''+9y=0$

8. Su atitinkama A reikšme funkcija $y=Ae^{2x}$ yra diferencialinės lygties $y''+2y'+3y=22e^{2x}$ sprendinys. Apskaičiuokite tą A reikšmę.

9. Skystyje besisukantį diską veikia trintis, kurios stabdantysis veikimas proporcingas kampiniam greičiui. Raskite kampinio greičio priklausomybę nuo laiko, žinodami, kad diskas, pradėjęs suktis 100 aps/min greičiu, po 1 min sukosi 60 aps/min greičiu.

10. Izoklinių metodu sudarykite lygties $yy'=x$ krypčių lauką. Nubraižykite integralinę kreivę, einančią per tašką $P(0, 2)$. Gautąjį rezultatą palyginkite su tiksliu tos lygties sprendiniu.

11. Oilerio laužčių metodu intervale $[0, 1]$ raskite diferencialinės lygties $y'=4x-2y$ apytikslį sprendinį, atitinkantį pradinę sąlygą $y(0)=\frac{1}{2}$ (intervalą $[0, 1]$ padalykite į 4 lygias dalis). Raskite y reikšmę, atitinkančią $x=1$.

§ 3. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SUDARYMAS

8. Dinamikos diferencialinės lygtys. Vienas svarbiausių fizikos dėsnių yra antrasis Niutono dėsnis, apimantis procesų, susijusių su kūnų judėjimu, įvairovę. Tuo atveju, kai judančio kūno masė nekinta (iki raketų sukūrimo tik šis atvejis buvo svarbus praktikai), antrasis Niutono dėsnis išreiškiamas šitaip: *laisvai judantį kūną veikianti jėga yra proporcinga jos sukeltam pagreičiui, o proporcingumo koeficientas lygus kūno masei.*

Šitaip formuluojant, pagreitis ir jėga laikomi vektoriniais dydžiais, todėl dėsnis užrašomas šitaip:

$$\vec{F}=m\vec{a}.$$

Jei kūnas juda tiese, tai jėga ir pagreitis yra nukreipti išilgai tiesės, todėl antrąjį Niutono dėsnį galima užrašyti papraščiau:

$$F=ma.$$

Tiese judančio kūno greitis yra jo koordinatės išvestinė laiko atžvilgiu, o pagreitis — greičio išvestinė laiko atžvilgiu, t. y. koordinatės antroji išvestinė laiko atžvilgiu. Kitaip sakant, teisingos šitokios lygybės: $v=y'$, $a=v'=y''$. Todėl vietoj $F=ma$ galima rašyti $F=my''$.

Dažniausiai jėga F priklauso nuo trijų kintamųjų: laiko t, taško koordinatės y ir greičio y', t. y. $F=F(t, y, y')$. Todėl lygybę $F=my''$ galima užrašyti šitaip:

$$my''=F(t, y, y').$$

Gavome antros eilės diferencialinę lygtį, iš kurios reikia rasti taško judėjimo dėsnį, t. y. koordinatės y priklausomybę nuo t, $y=f(t)$. Vadinasi, nagrinėdami jėgų veikiamo materialaus taško tiesiaeigį judėjimą, turime spręsti antros eilės diferencialines lygtis.

Keliais pavyzdžiais parodysime, kaip sudaromos diferencialinės lygtys, sprendžiant dinamikos uždavinius. Kai kurias lygtis išspręsime 4 paragrafe.

1 pavyzdys. Sudarykime parašiutininko judėjimo diferencialinę lygtį, tardami, kad oro pasipriešinimo jėga proporcinga judėjimo greičiui.

Sprendimas. Parašiutininką veikia sunkis, lygus mg, ir oro pasipriešinimo jėga, proporcinga judėjimo greičiui ir nukreipta prieš greičio kryptį, būtent, lygi $-kv$. Vadinasi, atstojamoji jėga F, veikianti parašiutininką, lygi $mg-kv$. Kadangi pagal antrąjį Niutono dėsnį $F=ma$, tai šiuo atveju $ma=mg-kv$.

Ieškomoji funkcija y reiškia atstumą nuo parašiutininko padėties pradiniu momentu iki jo padėties momentu t (tariame, kad parašiutininkas leidžiasi tiesiai žemyn). Kadangi greitis yra pirmoji, o pagreitis — antroji funkcijos y išvestinė, tai gauname tokią judėjimo diferencialinę lygtį:

$$my''=mg-ky'. \qquad (1)$$

2 pavyzdys. Laisvai skriejanti raketa tolsta nuo Žemės. Parašykime jos judėjimo diferencialinę lygtį.

Sprendimas. Kadangi sunkis, veikiantis raketą, mažėja jai tolstant nuo Žemės, reikia atsižvelgti ne tik į antrąjį Niutono dėsnį, bet ir į traukos dėsnį (abu dėsnius atrado Niutonas, spręsdamas konkretų uždavinį — nagrinėdamas planetų judėjimą aplink Saulę ir išvesdamas Keplerio atrastus to judėjimo dėsnius). Jei m — raketos masė, M — Žemės masė, y — raketos atstumas nuo Žemės centro, o G — gravitacijos konstanta, tai pagal visuotinės traukos dėsnį

$$F = -G\frac{mM}{y^2}.$$

Todėl raketos judėjimo diferencialinė lygtis yra šitokia:

$$my'' = -G\frac{mM}{y^2},$$

t. y.

$$y'' = -\frac{GM}{y^2}.$$

Atkreipiame dėmesį į tai, kad Žemės paviršiuje, t. y. kai $y=R$ (R — Žemės spindulys), turi būti $F=-mg$. Todėl $-mg=-\frac{mMG}{R^2}$, o iš čia $MG=gR^2$. Vadinasi, raketos judėjimo diferencialinę lygtį galima užrašyti šitaip:

$$y'' = -\frac{gR^2}{y^2}. \qquad (2)$$

3 pavyzdys. Sakykime, kad Šiaurės ir Pietų polius jungia tiesus tunelis, einantis per Žemės centrą. Į tunelį metamas masės m kūnas. Parašykime to kūno judėjimo diferencialinę lygtį, tardami, kad aplinkos pasipriešinimo nėra, o Žemės tankis yra pastovus.

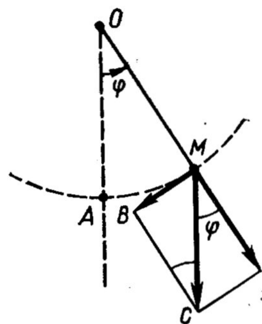
Sprendimas. Reikės remtis tokia traukos savybe: tuščiavidurio rutulio (t. y. kūno, kurį riboja dvi koncentrinės sferos) viduje traukos jėga lygi nuliui; be to, rutulys traukia šalia jo esantį kūną taip, tarytum to rutulio masė būtų sukoncentruota jo centre. Todėl, kai tuneliu judančio kūno atstumas nuo Žemės centro lygus y, jį veikia rutulio, kurio spindulys y, traukos jėga. To rutulio masė yra $\frac{y^3}{R^3}$ kartų mažesnė už Žemės masę M, todėl ji lygi $\frac{y^3M}{R^3}$. Vadinasi, kūną veikianti jėga lygi

$$F = -G\frac{mMy^3}{R^3y^2} = -\frac{GmMy}{R^3} = -\frac{mgR^2y}{R^3} = -\frac{mgy}{R}.$$

Tikrindami, ar teisingai apskaičiavome jėgą, veikiančią judantį kūną, prisiminkime, kad Žemės paviršiuje (kai $y=R$) gauname $F=-mg$, kaip ir turi būti, o Žemės centre (kai $y=0$) gauname $F=0$, kaip irgi turi būti, nes tame taške visų Žemės dalelių traukos jėgų atstojamoji lygi nuliui.

Vadinasi, įsitikinome, kad mūsų fantastinio kūno judėjimo diferencialinė lygtis yra

$$y''=-\frac{gy}{R}. \qquad (3)$$



6 pav.

4 p a v y z d y s. Ant standaus ir nesvaraus siūlo, kurio ilgis lygus l, pakabintas masės m materialus taškas. Įtemptą siūlą patraukus iš pusiausvyros padėties ir paleidus, materialusis taškas pradeda svyruoti. Parašysime šio svyravimo diferencialinę lygtį, tardami, kad oro pasipriešinimas ir trintis pakabinimo taške lygūs nuliui (matematinės svyruoklės svyravimo uždavinys).

S p r e n d i m a s. Kampo AOM didumą momentu t pažymėkime raide φ. Sunkį mg suskaidykime į dvi komponentes spindulio ir liestinės kryptimis (6 pav.). Komponentė liestinės kryptimi lygi $-mg\sin\varphi$ (jos veikimo kryptis priešinga siūlo judėjimo krypčiai). Jei ω — spindulio l apskritimu judančio taško kampinis greitis, tai jo linijinis greitis v lygus $l\omega$. Kadangi ω yra φ išvestinė laiko t atžvilgiu ($\omega=\varphi'$), tai $v=l\varphi'$. Iš to aišku, kad linijinis pagreitis lygus greičio $l\varphi'$ išvestinei $l\varphi''$ (čia svarbu, kad l — pastovus dydis). Vadinasi, jėga $-mg\sin\varphi$ sukelia pagreitį $l\varphi''$, todėl, remdamiesi antruoju Niutono dėsniu, gauname diferencialinę lygtį $ml\varphi''=-mg\sin\varphi$, arba

$$l\varphi''=-g\sin\varphi. \qquad (4)$$

9. Planetos judėjimo aplink Saulę diferencialinė lygtis. Aštuntame skyrelyje nagrinėjome judėjimo diferencialinių lygčių sudarymo pavyzdžius, kai judėjimas yra tiesiaeigis. Bendras tokios lygties pavidalas, kaip aiškinome 5 skyrelyje, yra

$$my''=F(t, y, y').$$

Kai judėjimas nėra tiesiaeigis, jo lygtį rašome šitaip:

$$m\vec{r}''=F(t, \vec{r}, \vec{r}');$$

čia $\vec{r}(t)$ yra argumento t vektorinė funkcija (funkcija, kuri kiekvienai t reikšmei priskiria vektorių $\vec{r}(t)$). Vektorinės funkcijos

išvestinė apibrėžiama panašiai, kaip ir skaliarinės funkcijos išvestinė, būtent,

$$\vec{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Išvestinė $\vec{r}'(t)$ yra vektorius, kiekvienu momentu nukreiptas išilgai trajektorijos liestinės, o to vektoriaus ilgis lygus judėjimo tiesiniam greičiui tuo momentu.

Parašysime planetos judėjimo aplink Saulę diferencialinę lygtį (tą lygtį sudarė ir išsprendė Niutonas). Jei pradinis planetos greitis išreiškiamas vektoriumi $\vec{v}_0$, tai toliau planeta judės plokštumoje, einančioje per Saulę (ją laikome materialiu tašku) ir lygiagrečioje tam vektoriui. Todėl iš pat pradžių nagrinėjamą uždavinį galima laikyti judėjimo plokštumoje uždaviniu.

Tarkime, kad Saulė yra koordinačių pradžioje O, o planeta — taške $M(x, y)$. Traukos jėga nukreipta tiese OM iš taško M į O. Ji atvirkščiai proporcinga atstumo nuo M iki O kvadratui (7 pav.). Todėl $\vec{F}=-k(\vec{r})\cdot\vec{r}$, be to,

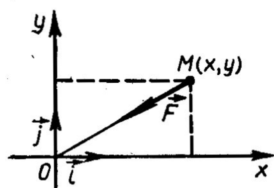
$$|\vec{F}|=\frac{k_1}{|\vec{r}|^2},$$

kai $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Iš to išplaukia, kad $\frac{k_1}{|\vec{r}|^2}=k(\vec{r})\cdot|\vec{r}|$, todėl $k(\vec{r})=\frac{k_1}{|\vec{r}|^3}$. Vadinasi, $\vec{F}=-\frac{k_1}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r}$, o planetos judėjimo diferencialinė lygtis yra šitokia:

$$m\vec{r}''=-\frac{k_1}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r}. \quad (5)$$

Kadangi $\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}$, tai $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$, o $\vec{r}''=x''\cdot\vec{i}+$ $+y''\cdot\vec{j}$. Todėl (5) lygtį galima parašyti kitaip:

$$m(x''\vec{i}+y''\vec{j})=-\frac{k_1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\quad(x\vec{i}+y\vec{j}).$$



7 pav.

Gautoji vektorinė lygtis ekvivalenti dviejų diferencialinių lygčių sistemai

$$\begin{cases} mx''=-\dfrac{k_1x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ my''=-\dfrac{k_1y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Vadinasi, tirdami planetos judėjimą aplink Saulę, turime išspręsti diferencialinių lygčių sistemą.

Spręsdami planetų, jų palydovų ir kometų judėjimo diferencialines lygtis, mokslininkai numato būsimą dangaus kūnų judėjimą, sužino palydovų užtemimo momentus ir t. t. Matematinių metodų taikymo gamtos mokslams triumfas buvo Halio kometos pasirodymo 1759 metais numatymas. Kai paaiškėjo, kad Uranas nukrypsta nuo apskaičiuotos orbitos, mokslininkai nesuabejojo matematinių metodų teisingumu ir spėjo, kad turi būti nežinoma to meto astronomams planeta, kurios trauka iškreipia Urano orbitą. XIX a. viduryje prancūzų astronomas U. Leverjė ir anglų astronomas Dž. Adamsas tuo pačiu metu ir nepriklausomai vienas nuo kito apskaičiavo, kaip turi judėti ta nežinomoji planeta, kad sukeltų pastebėtą Urano judėjimo trukdymą. Tai padėjo jiems nurodyti, kur yra nežinomoji planeta. 1846 m. vokiečių astronomas I. Galė, remdamasis Leverjės apskaičiavimais, nurodytoje vietoje aptiko naują planetą (ji buvo pavadinta Neptūnu). Anglų astronomai nepatikėjo jauno mokslininko Adamso apskaičiavimais (jam tada buvo tik 26 metai) ir praleido progą atrasti Neptūną.

Metodai, kurie specialiai buvo sukurti teorinei astronomijai, dabar sėkmingai taikomi dirbtinių palydovų, raketų ir pan. judėjimui nagrinėti.

10. Srovės paprasčiausioje elektrinėje grandinėje diferencialinė lygtis. Jei į uždarą elektrinę grandinę nuosekliai įjungiame srovės šaltinį, kurio elektrovaros jėga E, aktyviąją varžą R ir ritę, kurios induktyvumas L, tai, kaip žinome iš elektrotechnikos, teisinga lygybė

$$E=U+U_L,$$

jei U — įtampa aktyviajame grandinės ruože, o U_L — įtampa ritėje. Be to, žinoma, kad

$$U=R\cdot I,\quad U_L=L\cdot I',$$

jei I — srovės stipris momentu t. Todėl gauname diferencialinę lygtį

$$E=R\cdot I+L\cdot I', \tag{6}$$

iš kurios reikia rasti funkciją $I(t)$.

4 paragrafe tą lygtį spręsime, laikydami elektrovaros jėgą $E(t)$ kintama, o dabar tarsime, kad E yra pastovi. Tokiu atveju (6) lygtį rašome šitaip:

$$I'=\frac{E}{L}-\frac{RI}{L},$$

arba

$$I' = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{E}{R}\right).$$

Tai išlyginimo proceso lygtis (žr. 3 skyrelį). Taikydami šio tipo lygties bendrojo sprendinio formulę (žr. 3 skyrelio (4) formulę), gauname

$$I = \frac{E}{R} + \left(I_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

(I_0 — pradinis srovės stipris). Jei pradinis srovės stipris lygus nuliui (srovės įjungimo procesas), tai

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Kadangi $e^{-\frac{R}{L}t} \to 0$, kai $t \to +\infty$, tai iš paskutinės lygybės aišku, kad $I \to \frac{E}{R}$. Tai reiškia, kad srovės stipris artėja prie reikšmės, kurią nurodo Omo dėsnis.

11. Diferencialinės lygtys chemijoje.

5 p a v y z d y s. Kai kurių cheminių reakcijų greitis yra proporcingas dviejų reaguojančių medžiagų koncentracijų sandaugai, be to, viena pirmos medžiagos molekulė reaguoja su viena antros medžiagos molekule. Parašykime diferencialinę lygtį, iš kurios galima sužinoti gautos medžiagos kiekį y momentu t, kai pirmo reagento pradinė koncentracija buvo a, o antro — b.

S p r e n d i m a s. Kai susidaro y molių naujos medžiagos, pirmo reagento koncentracija tirpale lygi $a-y$, antro $b-y$. Iš uždavinio sąlygos aišku, kad

$$y' = k(a-y)(b-y). \qquad (7)$$

Tai ir bus nagrinėjamos cheminės reakcijos diferencialinė lygtis.

Jei $a=b$ (t. y. abiejų reagentų pradinės koncentracijos tirpale vienodos), tai iš (7) lygties gauname lygtį

$$y' = k(a-y)^2. \qquad (8)$$

6 p a v y z d y s. Kai kuriose cheminėse reakcijose susidaranti medžiaga veikia kaip katalizatorius, greitinantis reakciją. Tokiu atveju reakcijos greitis proporcingas tiek pradinės medžiagos koncentracijai, tiek ir tiesinės susidarančios medžiagos koncentracijos funkcijai (autokatalizinė reakcija). Parašykime diferencialinę lygtį, iš kurios galima sužinoti susidariusios medžiagos kiekį y momentu t, kai pradinė koncentracija lygi a.

Sprendimas. Remdamiesi sąlyga ir samprotaudami, kaip praeitame pavyzdyje, gauname diferencialinę lygtį

$$y' = (k + my)(a - y); \tag{9}$$

čia $a - y$ pradinės medžiagos koncentracija momentu t, o $k + my$ — tiesinė gaunamos medžiagos koncentracijos funkcija (k ir m — skaitiniai koeficientai).

Jei katalizatorius yra pradinė medžiaga, tai tiesinė funkcija, apie kurią kalbama uždavinio sąlygoje, yra $k + m(a - y)$, o diferencialinė lygtis — tokia

$$y' = (k + m(a - y))(a - y). \tag{10}$$

12. Diferencialinės lygtys biologijoje. Tikrovės pažinimo metodai, pagrįsti matematiniais modeliais, sėkmingai taikomi ir biologijoje. Tik čia klausimą komplikuoja nepaprastas ryšių gausumas ir įvairumas biologinėse sistemose: biologijoje ryšių nepalyginamai daugiau negu fizikoje ir net chemijoje.

Nagrinėdami gyvų organizmų kolonijos plėtimosi palankiomis sąlygomis uždavinį, 2 skyrelyje (§ 1) įsitikinome, kad individų kiekis y apibūdinamas diferencialine lygtimi $y' = \alpha y$ (α — skaitinis koeficientas). Tačiau nekreipėme dėmesio į tai, kad gyvūnų užimama erdvė ir maisto ištekliai yra riboti, ir tarėme, kad nėra plėšrūnų. Diferencialinės lygties $y' = \alpha y$ sprendinys — rodiklinė funkcija $y = y_0 e^{\alpha t}$ — didėja labai sparčiai ir neribotai. Tuo tarpu besaikis stebimos rūšies gausėjimas ribotame plote sukelia vis dažnesnius individų susidūrimus dėl maisto, erdvės ir t. t. Kadangi, individų skaičiui padidėjus n kartų, nepageidaujamų susidūrimų skaičius padidėja n^2 kartų, tai galima tarti, kad neigiamas kolonijos gausumo poveikis gimstamumui proporcingas individų skaičiaus kvadratui. Todėl lygtį $y' = \alpha y$ reikia pakeisti lygtimi

$$y' = \alpha y - \beta y^2. \tag{11}$$

Paskui (23 skyrelyje), išsprendę šią lygtį, pamatysime, kad ji duoda pakankamai artimą tikrovei vaizdą: kolonija iš pradžių gausėja pagal rodiklinį dėsnį, paskui augimas sulėtėja ir individų kiekis pradeda artėti prie tam tikros ribos.

Dar artimesni tikrovei rezultatai gaunami, kai atsižvelgiama į tai, jog daugelis rūšių gyvena ne izoliuotos, o apsuptos priešų (plėšrūnų), kurie minta tos rūšies gyvūnais. Tokiu atveju reikia nagrinėti dvi funkcijas — aukų kiekį y ir plėšrūnų kiekį x kaip laiko t funkcijas. Tarkime, kad be plėšrūnų aukų kiekis didėja

greičiu, proporcingu tos rūšies individų skaičiui, o plėšrūnų sunaikinamų aukų skaičius proporcingas bendro aukų skaičiaus ir bendro plėšrūnų skaičiaus sandaugai (maždaug proporcingas plėšrūnų ir aukų susidūrimų skaičiui). Tuomet gauname diferencialinę lygtį

$$y' = \alpha y - \beta xy.$$

Kadangi reikia rasti dvi funkcijas, tai būtina sudaryti dar vieną lygtį, į kurią įeitų išvestinė x' — plėšrūnų veisimosi greitis. Savaime aišku, kuo daugiau plėšrūnai turi maisto (aukų), tuo greičiau jie dauginasi. Be to, veisimosi greitis priklauso ir nuo plėšrūnų kiekio tuo momentu. Tuo tarpu plėšrūnų mirštamumas proporcingas jų skaičiui, bet nepriklauso nuo aukų skaičiaus. Todėl pirmą išvestinės x' artinį galima išreikšti lygtimi

$$x' = \gamma xy - \delta x.$$

Vadinasi, „aukos-plėšrūno" uždavinį pakeitėme dviejų diferencialinių lygčių sistema

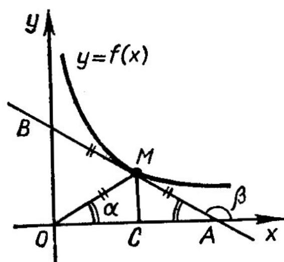
$$\begin{cases} y' = \alpha y - \beta xy, \\ x' = \gamma xy - \delta x \end{cases} \qquad (12)$$

(α, β, γ, δ — teigiami skaičiai). Šią sistemą išspręsime vėliau (žr. 23 skyrelį). Dabar tik atkreipsime dėmesį į štai ką: jei $x = \frac{\alpha}{\beta}$, $y = \frac{\delta}{\gamma}$, tai $x' = y' = 0$. Tai reiškia, kad $M\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\delta}{\gamma}\right)$ yra tiriamos sistemos „stacionari būsena"— sistema yra pusiausvyroje, nes nei aukų, nei plėšrūnų kiekis laikui bėgant nesikeičia.

Baigdami pabrėžiame, kad (12) diferencialinių lygčių sistema nėra tikslus tikrovės atspindys — iš tikrųjų dar reikia atsižvelgti į kitas organizmų rūšis, jų sąveiką, bendras sąlygas, ribojančias atskiros rūšies kiekio didėjimą, ir į daugelį kitų faktorių. Matematiškai modeliuoti dideles gyvūnų ir augalų bendrijas, tų bendrijų evoliuciją — aktualus ir svarbus šiuolaikinio mokslo uždavinys.

13. Diferencialinės lygtys, sudaromos sprendžiant geometrinio turinio uždavinius. Sprendžiant daugelį geometrijos uždavinių, reikia rasti kreivę, kurios liestinė, normalė (tiesė, einanti per lietimosi tašką ir statmena liestinei) ir įvairios atkarpos, susijusios su šiomis tiesėmis, turi iš anksto nurodytas savybes. Sprendžiant tokius uždavinius, sudaromos diferencialinės lygtys, dažniausiai remiantis išvestinės geometrine prasme (išvestinė — liestinės krypties koeficientas, t. y. ji lygi tangentui kampo, kurį

kreivės liestinė sudaro su teigiamąja abscisių ašies kryptimi).



8 pav.

7 pavyzdys. Kreivė eina per tašką $P(a, b)$. Jos liestinės atkarpą, esančią tarp koordinačių ašių, lietimosi taškas dalija pusiau. Parašykime tos kreivės diferencialinę lygtį.

Sprendimas. Sakykime, $y=f(x)$ yra nagrinėjamos kreivės lygtis (kreivė schemiškai pavaizduota 8 paveiksle). Per kreivės tašką $M(x, y)$ nubrėžta liestinė, kuri koordinačių ašis kerta taškuose A ir B. Kadangi taškas M yra stačiojo trikampio AOB įžambinės AB vidurys, tai atkarpa OM yra to trikampio pusiaukraštinė. Iš geometrijos žinome, kad stačiojo trikampio pusiaukraštinės ilgis lygus pusei įžambinės ilgio. Vadinasi, trikampis OMA yra lygiašonis; todėl jo kampai MOA ir MAO yra vienodo didumo: $M\widehat{O}A=M\widehat{A}O$. Iš to aišku, kad $\alpha=M\widehat{O}A=180^\circ-M\widehat{A}x=$ $=180^\circ-\beta$, ir todėl

$$\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\beta.$$

Kadangi $\operatorname{tg}\alpha=\frac{|MC|}{|CO|}$, o $\operatorname{tg}\beta$ lygus liestinės, nubrėžtos per tašką M, krypties koeficientui y', tai

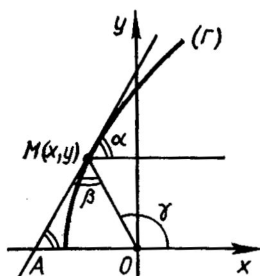
$$y'=-\frac{y}{x}. \tag{13}$$

Gavome nagrinėjamos kreivės diferencialinę lygtį.

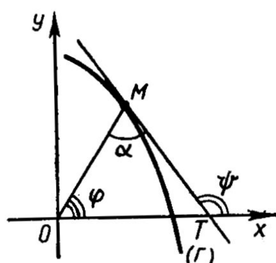
8 pavyzdys. Lygiagrečių spindulių pluoštas, atsispindėjęs nuo kreivės Γ (pagal optikos dėsnius), eina per vieną tašką. Sudarykime kreivės Γ diferencialinę lygtį.

Sprendimas. Iš optikos žinoma, kad spindulio kritimo kampas lygus atspindžio kampui. Kalbant apie atspindį nuo kreivės, kritimo ir atspindžio kampais laikomi kampai, kuriuos krintantis ir atsispindėjęs šviesos spinduliai sudaro su normale atspindžio taške (t. y. su tiese, statmena kreivės liestinei ir einančia per lietimosi tašką).

Tarkime, kad spinduliai lygiagretūs abscisių ašiai, o taškas, per kurį eina atsispindėję spinduliai, sutampa su koordinačių pradžia (9 pav.). Tuomet sprendžiamą fizikos uždavinį galime suformuluoti grynai geometriškai: reikia rasti tokią kreivę Γ, kad, per bet kurį kreivės tašką M nubrėžus liestinę, kampas tarp liestinės ir teigiamosios abscisių ašies krypties būtų lygus kampui,



9 pav.



10 pav.

kurį liestinė sudaro su tiese, einančia per tašką M ir koordinačių pradžią.

Iš uždavinio sąlygos žinome, kad $\alpha=\beta$ (žr. 9 pav.). Kadangi α yra kampas, kurį liestinė, nubrėžta per kreivės Γ tašką $M(x, y)$, sudaro su abscisių ašimi, tai $\operatorname{tg}\alpha=y'$, jei $y=f(x)$ — kreivės Γ lygtis. Iš lygybės $\alpha=\beta$ aišku, kad trikampis AOM yra lygiašonis, todėl $\gamma=2\alpha$. Vadinasi, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. Antra vertus, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{y}{x}$. Todėl, atsižvelgę į tai, kad $\operatorname{tg}\alpha=y'$, gauname

$$\frac{y}{x}=\frac{2y'}{1-(y')^2}. \qquad (14)$$

9 pavyzdys. Peilis, kurio ašmenys sudaro kreivę Γ, sukasi apie tašką O (10 pav.). Kampas OMT, kurį spindulys OM sudaro su kreivės Γ liestine, einančia per tašką M, vadinamas *pjovimo kampu*. Kai kuriose mašinose (metalo pjovimo staklėse, šiaudapjovėse ir pan.) pjovimo kampas turi būti pastovus. Sudarykime diferencialinę lygtį, iš kurios galima rasti kreivę Γ su pastoviu pjovimo kampu.

Sprendimas. Nagrinėjamą uždavinį galima suformuluoti šitaip: rasti tokią kreivę, kad kampas, kurį liestinė MT, liečianti kreivę taške M, sudaro su spinduliu, išvestu iš koordinačių pradžios per tašką M, būtų pastovus ir lygus α.

Kampą tarp spindulio OM ir ašies Ox žymėsime raide φ, o kampą tarp liestinės MT ir ašies Ox — raide ψ. Pagal sąlygą $\widehat{OMT}=\alpha$. Kadangi $\psi=\alpha+\varphi$, $\operatorname{tg}\psi=y'$ ir $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$, tai, remdamiesi formule $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}$ ir žymėdami $\operatorname{tg}\alpha=k$, gauname

$$y'=\frac{k+\frac{y}{x}}{1-k\cdot\frac{y}{x}}. \qquad (15)$$

14. Bendros pastabos dėl diferencialinių lygčių sudarymo. Anksčiau išnagrinėtuose uždaviniuose lygčių sudarymą lengvino tai, kad į atitinkamo dėsnio (fizikos, chemijos ar gamtos) formuluotę įeidavo greitis arba pagreitis, t. y. pirmoji arba antroji ieškomosios funkcijos išvestinė. Sprendžiant geometrinius uždavinius, diferencialinės lygties sudarymas buvo pagrįstas tuo, kad išvestinė yra liestinės krypties koeficientas.

Tačiau dažnai procesai apibūdinami dėsniais, kurių formuluotėje neminimas nei greitis, nei pagreitis. Išdėstysime bendrą idėją, kuri taikoma tokiems procesams nagrinėti.

Dažniausiai per trumpą laikotarpį fizinių (ir kitų) procesų greitis mažai pasikeičia, todėl jį galima laikyti pastoviu. Tai įgalina bet kuriuo momentu padaryti proceso „momentinę nuotrauką" ir parašyti lygtį, siejančią dydžių pokyčius, įvykusius, kaip sako fizikai, per „be galo mažą laiko tarpą".

Detaliai aprašysime diferencialinės lygties sudarymą. Pirmiausia išsiaiškiname, kokiu dėsniu apibūdinamas procesas, nurodytas uždavinio sąlygoje, ir nusprendžiame, kurį procese dalyvaujantį dydį reikia laikyti nepriklausomu ir kurį — priklausomu. Dažniausiai nepriklausomu kintamuoju pasirenkamas laikas t. Paskui tariame, kad trumpame laiko intervale $[t, t+\Delta t]$ visi tame procese dalyvaujantys dydžiai kinta tolygiai. Tai įgalina, taikant žinomus dėsnius, susieti t ir Δt reikšmes su ieškomąja funkcija y bei jos pokyčiu Δy. Gautoji lygybė yra tik apytikslė, nes iš tikrųjų dydžiai kinta netolygiai. Tačiau, abi lygybės puses padaliję iš Δt ir perėję prie ribos, kai Δt artėja prie nulio, gauname tikslią lygybę, kuri sieja laiką t, kintamąjį dydį y ir jo išvestines. Ši lygybė ir bus proceso diferencialinė lygtis.

10 p a v y z d y s. 40 l talpos inde yra 80% azoto ir 20% deguonies mišinys. Kas sekundę į indą įleidžiama 0,2 l azoto ir iš jo išleidžiama tiek pat mišinio. Po kiek laiko inde bus 99% azoto?

S p r e n d i m a s. Nepriklausomu kintamuoju laikysime laiką t; po t sekundžių nuo bandymo pradžios inde esančio azoto kiekį (litrais) žymėsime $y(t)$. Tuo momentu azotas sudaro $\frac{y}{40}$ dalį viso mišinio. Per Δt sekundžių į indą patenka $0{,}2\Delta t$ litrų azoto ir išteka $0{,}2\Delta t$ litrų mišinio. Jei tarsime, kad per mažą laiko tarpą $[t, t+\Delta t]$ azoto koncentracija inde nepasikeitė, tai ištekėjusiame mišinyje bus $\frac{y}{40}\cdot 0{,}2\Delta t$ litrų azoto. Todėl azoto prieaugis Δy (litrais) išreiškiamas šitaip:

$$\Delta y \approx 0{,}2\Delta t - \frac{0{,}2y}{40}\Delta t.$$

Parašėme apytikslę lygybę, nes iš tikrųjų intervale $[t, t+\Delta t]$ azoto koncentracija kinta. Tačiau, abi tos lygybės puses padaliję iš Δt, perėję prie ribos, kai $\Delta t \to 0$, ir atsižvelgę į tai, kad $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'$, gausime tikslią lygybę

$$y' = 0{,}2\left(1 - \frac{y}{40}\right).$$

Tai ir bus nagrinėjamojo proceso diferencialinė lygtis.

Išspręsime sudarytąją diferencialinę lygtį. Tuo tikslu ją parašysime šitaip:

$$y' = -0{,}005(y - 40).$$

Tai išlyginamojo proceso diferencialinė lygtis (žr. 3 skyrelio (3) lygtį). Remdamiesi 3 skyrelio (4) formule, gauname

$$y = 40 + (y_0 - 40)e^{-0{,}005t};$$

čia y_0 — ieškomo dydžio y reikšmė momentu $t=0$. Sąlygoje pasakyta, kad pradiniu momentu 40 litrų inde buvo 80% azoto, t. y. 32 l azoto. Vadinasi, $y_0 = 32$. Todėl

$$y = 40 - 8e^{-0{,}005t}.$$

Dabar lengva sužinoti, po kiek laiko azoto koncentracija mišinyje pasieks 99%. Tuo metu inde bus 39,6 litrai azoto. Vadinasi, reikia išspręsti rodiklinę lygtį

$$39{,}6 = 40 - 8e^{-0{,}005t}.$$

Iš šios lygties paeiliui sudarome jai ekvivalenčias lygtis:

$$8e^{-0{,}005t} = 0{,}4,$$
$$e^{-0{,}005t} = 0{,}05,$$
$$-0{,}005t = \ln 0{,}05,$$
$$t = -\frac{\ln 0{,}05}{0{,}005} = 200 \ln 20 \approx 600 \text{ (s)}.$$

11 pavyzdys. Cilindrinis indas, kurio aukštis lygus H, o pagrindo spindulys R, pripiltas vandens. Indo dugne yra skylutė, kurios plotas lygus S. Trečdalis vandens išteka per t_1 sekundžių. Per kiek laiko pro tą skylutę ištekės visas vanduo?

Sprendimas. Jei vanduo tekėtų tolygiai, tai uždavinį išspręstume visiškai lengvai: visas vanduo ištekės per $3t_1$ sekundžių. Tačiau tyrimai rodo, kad iš pradžių vanduo teka greitai, o paskui, žemėjant vandens lygiui inde, tekėjimo greitis mažėja. Todėl reikia atsižvelgti į tai, kad tekėjimo greitis v priklauso nuo skysčio stulpelio aukščio h ties skylute. Italų fiziko Toričelio atlikti tyri-

mai parodė, kad greitis v apytiksliai reiškiamas formule $v = k\sqrt{2gh}$, kurioje g reiškia sunkio pagreitį, o k — koeficientą, priklausantį nuo skysčio klampumo ir skylutės formos (pavyzdžiui, kai vanduo teka pro apskritą skylutę, $k=0{,}6$).

Padarysime tekėjimo proceso „momentinę nuotrauką" intervale $[t, t+\Delta t]$. Tarkime, kad to intervalo pradžioje skysčio stulpelio aukštis ties skylute buvo lygus h, o pabaigoje sumažėjo iki $h+\Delta h$ (Δh — neigiamas aukščio pokytis). Tuomet ištekėjusio skysčio tūris ΔV lygus tūriui cilindro, kurio aukštis lygus $|\Delta h| = -\Delta h$, o pagrindo plotas πR^2, t. y.

$$\Delta V = -\pi R^2 \Delta h.$$

Ištekėjęs skystis sudaro cilindrinę čiurkšlę, kurios pagrindo plotas lygus S. Jos aukštis lygus keliui, kurį nueina ištekantis iš indo skystis per laikotarpį $[t, t+\Delta t]$. To laikotarpio pradžioje tekėjimo greitis pagal Toričelio dėsnį buvo lygus $k\sqrt{2gh}$, o jo pabaigoje — lygus $k\sqrt{2g(h+\Delta h)}$. Jei Δt visiškai mažas, tai Δh irgi labai mažas, todėl gautos greičių išraiškos yra beveik lygios. Vadinasi, skysčio nueitas kelias per laiką Δt apytiksliai lygus $k\sqrt{2gh}\cdot\Delta t$ (tariame, kad per tą laiką tekėjimo greitis buvo pastovus ir lygus $k\sqrt{2gh}$). Todėl per laikotarpį $[t, t+\Delta t]$ ištekėjusio skysčio tūrį galima apskaičiuoti pagal apytikslę formulę

$$\Delta V \approx k\sqrt{2gh}\Delta t \cdot S.$$

Gavome dvi ištekėjusio per laiką Δt skysčio tūrio išraiškas. Palyginę tuos reiškinius, gauname

$$-\pi R^2 \Delta h \approx k\sqrt{2gh}\cdot S\cdot\Delta t.$$

Abi tos apytikslės lygybės puses padalijame iš Δt ir, eidami prie ribos, kai $\Delta t \to 0$, gauname tikslią lygybę

$$-\pi R^2 h' = k\sqrt{2gh}\cdot S. \qquad (16)$$

Skysčio ištekėjimo diferencialinė lygtis sudaryta. Išsprendę tą lygtį (tai padarysime 17 skyrelyje), gausime skysčio stulpelio inde aukščio h priklausomybę nuo laiko t.

Pratimai

12. Motorinės valties greitis stovinčiame vandenyje lygus 5 m/s. Valčiai plaukiant didžiausiu greičiu, išjungiamas motoras, ir po 40 s valties greitis būna tik 2 m/s. Tardami, kad vandens

pasipriešinimo jėga proporcinga valties plaukimo greičiui, raskite valties greitį, praėjus 2 min nuo motoro išjungimo.

13. Kai šviesa eina pro ploną vandens sluoksnį, jo absorbuotas šviesos kiekis proporcingas krintančios šviesos kiekiui ir sluoksnio storiui. 3 m storio vandens sluoksnis absorbuoja pusę pradinio šviesos kiekio. Kokia to kiekio dalis pasieks 30 m gylį?

14. Masės m materialus taškas išmestas vertikaliai aukštyn pradiniu greičiu v_0. Tašką veikia ne tik sunkis, bet ir oro pasipriešinimo jėga, proporcinga greičiui (proporcingumo koeficientas lygus k). Raskite greičio kitimo dėsnį.

15. Liestinės, nubrėžtos per bet kurį kreivės tašką, krypties koeficientas lygus lietimosi taško ordinatės kvadratui. Parašykite tos kreivės diferencialinę lygtį.

16. Kreivės liestinės atkarpa nuo lietimosi taško iki abscisių ašies kerta ordinačių ašį. Susikirtimo taškas šią atkarpą dalija pusiau. Parašykite tos kreivės diferencialinę lygtį.

17. Jei per bet kurį kreivės tašką M nubrėžiame liestinę, tai jos atkarpa nuo lietimosi taško M iki abscisių ašies turi ilgį, lygų atstumui nuo koordinačių pradžios iki taško M. Parašykite tos kreivės diferencialinę lygtį.

§ 4. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS

Sprendžiant daugelį praeito paragrafo uždavinių, reikėjo išspręsti atitinkamą diferencialinę lygtį. Nėra sprendimo metodo, tinkančio visoms diferencialinėms lygtims. Tačiau yra metodų, kurie gali būti taikomi lygčių tipams. Kai kuriuos šių metodų nagrinėsime šiame paragrafe.

15. Lygtis $y'=f(x)$. Paprasčiausios pirmos eilės diferencialinės lygtys yra $y'=f(x)$ pavidalo lygtys. Sprendžiant tokią lygtį, užtenka rasti funkciją $y=F(x)$, kurios išvestinė lygi $f(x)$, t. y. funkcijos f pirmykštę funkciją F. Mokymo priemonėje „Algebra ir analizės pradmenys IX—XI klasei" įrodyta, kad visų funkcijos f pirmykščių funkcijų aibė yra $\{F(x)+C \mid C \in \boldsymbol{R}\}$. Todėl, radus vieną funkcijos f pirmykštę F, galima parašyti bendrąjį lygties $y'=f(x)$ sprendinį

$$y=F(x)+C.$$

1 pavyzdys. Išspręskime diferencialinę lygtį $y'=x^2$.

S p r e n d i m a s. Viena funkcijos x^2 pirmykštė yra $\frac{x^3}{3}$, todėl bendrasis lygties $y'=x^2$ sprendinys yra

$$y=\frac{x^3}{3}+C.$$

2 p a v y z d y s. Raskime tokį diferencialinės lygties $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ sprendinį, kad $y(0)=1$.

S p r e n d i m a s. Viena funkcijos $\frac{1}{\cos^2 x}$ pirmykštė yra $\operatorname{tg} x$, todėl bendrasis diferencialinės lygties sprendinys bus

$$y=\operatorname{tg} x+C.$$

Iš sąlygos $y(0)=1$ galima rasti konstantos C reikšmę: kadangi $1=\operatorname{tg} 0+C$, tai $C=1$. Todėl ieškomasis atskiras sprendinys bus

$$y=\operatorname{tg} x+1.$$

Vadinasi, sprendžiant $y'=f(x)$ pavidalo diferencialines lygtis, reikia mokėti rasti pirmykštes funkcijas. Kuo daugiau yra funkcijų, kurių pirmykštes mokame rasti, tuo daugiau galime išspręsti tokių diferencialinių lygčių ir uždavinių, iš kurių tos lygtys sudaromos. Mokymo priemonėje „Algebra ir analizės pradmenys IX—XI klasei" nurodytos šios pirmykštės:

Funkcija	x^α, $\alpha\neq-1$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	a^x	e^x	$\frac{1}{x}$
Pirmykštė	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$-\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\frac{a^x}{\ln a}$	e^x	$\ln\lvert x\rvert$

Be to, ten pasakyta, kad funkcijų f ir g pirmykščių suma yra tų funkcijų sumos $f+g$ pirmykštė, o funkcijos f pirmykštės ir skaičiaus λ sandauga yra funkcijos λf pirmykštė.

Remdamiesi sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisykle, galime rasti funkcijos $y=\arcsin x$ išvestinę. Lygybė $y=\arcsin x$ ekvivalenti lygybei $x=\sin y$, kai $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$. Diferencijuodami abi lygybės $x=\sin y$ puses x atžvilgiu, gauname $1=\cos y\cdot y'$, todėl $y'=\frac{1}{\cos y}$. Kadangi $\sin^2 y+\cos^2 y=1$, tai $\lvert\cos y\rvert=\sqrt{1-\sin^2 y}=$ $=\sqrt{1-x^2}$. Tačiau šiuo atveju $\lvert\cos y\rvert=\cos y$, nes funkcija $\cos y$

intervale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ neneigiama. Vadinasi, įrodėme, kad $y'=$ $=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, t. y. išvedėme formulę

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Remdamiesi šia formule ir tardami, kad $a>0$, gauname

$$\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Vadinasi, $\arcsin\frac{x}{a}$ yra funkcijos $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ pirmykštė funkcija.

Panašiai galima įsitikinti, kad

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

ir kad $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ yra funkcijos $\frac{1}{a^2+x^2}$ pirmykštė funkcija.

Skaitytojui siūlome diferencijavimo metodu išvesti dar dvi formules:

$$(\ln|x+\sqrt{x^2+a}|)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}},$$

$$\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)'=\frac{2a}{x^2-a^2}.$$

Remdamiesi išvestosiomis formulėmis, galime praplėsti pirmykščių funkcijų lentelę:

Funkcija	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$	$\frac{1}{x^2-a^2}$
Pirmykštė	$\arcsin\frac{x}{a}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$	$\ln\lvert x+\sqrt{a+x^2}\rvert$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$

3 p a v y z d y s. Išspręskime diferencialinę lygtį $y'=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

S p r e n d i m a s. $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$.

Kadangi viena funkcijos $\frac{1}{\cos^2 x}$ pirmykštė yra funkcija $\operatorname{tg} x$, o funkcijos $\frac{1}{\sin^2 x}$ — funkcija $-\operatorname{ctg} x$, tai sumos $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$ visos pirmykštės išreiškiamos šitaip: $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$.

Vadinasi, bendrasis pateiktos diferencialinės lygties sprendinys yra

$$y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

4 pavyzdys. Išspręskime diferencialinę lygtį $(x^2-9)y'=6$.
Sprendimas. Pateiktąją lygtį parašysime šitaip:

$$y' = \frac{6}{x^2-9}.$$

Kadangi funkcijos $\frac{1}{x^2-a^2}$ pirmykštė yra $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$, tai funkcijos $\frac{6}{x^2-9}$ (kai $a=3$) pirmykštė bus

$$6 \cdot \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|, \text{ t. y. } \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|.$$

Vadinasi, bendrasis duotos diferencialinės lygties sprendinys yra

$$y = \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

Atkreipiame dėmesį, kad šiuo atveju, užrašant bendrąjį sprendinį, laisvąją konstantą patogiau rašyti $\ln|C|$. Tai padeda šiek tiek paprasčiau užrašyti bendrąjį sprendinį. Tokiu atveju

$$y = \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + \ln|C|,$$

todėl

$$y = \ln\left|C \cdot \frac{x-3}{x+3}\right|.$$

Tarp kitko, tokiais atvejais modulio ženklą praleidžiame: rašome tiesiog $y = \ln\left(C \cdot \frac{x-3}{x+3}\right)$, tardami, kad C yra laisvoji konstanta, „ištaisanti" pologaritminio reiškinio ženklą: jei $\frac{x-3}{x+3} > 0$, tai $C > 0$, o jei $\frac{x-3}{x+3} < 0$, tai ir $C < 0$. Sprendžiant diferencialines lygtis, dažnai tenka taip rašyti laisvąją konstantą.

Iš esmės padidinti pirmykščių funkcijų sąrašą padeda ši teorema.

Teorema. ***Jei funkcija F yra funkcijos f pirmykštė, o φ — diferencijuojama funkcija, tai $F(\varphi(x))$ yra funkcijos $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ pirmykštė.***

Įrodymas. Remdamiesi sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisykle, rašome:

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Kadangi $F'=f$, tai

$$(F(\varphi(x)))'=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Vadinasi, $F(\varphi(x))$ tikrai yra funkcijos $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ pirmykštė.

Dažniausiai vietoj $\varphi(x)$ ir $\varphi'(x)$ atitinkamai rašoma y ir y': jei $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė, tai $F(y)$ — funkcijos $f(y)\cdot y'$ pirmykštė.

Remdamiesi įrodyta teorema, galime iš kiekvienos turimos pirmykštės funkcijos sudaryti be galo daug naujų pirmykščių. Pavyzdžiui, žinome, kad viena funkcijos $\frac{1}{x}$ pirmykštė yra $\ln|x|$. Iš to išplaukia, kad funkcijos $\frac{1}{y}\cdot y'$ pirmykštė yra $\ln|y|$. Kadangi funkciją y galime rinktis laisvai, tai gauname be galo daug naujų rezultatų. Pavyzdžiui, imdami $y=x^2+1$, įsitikiname, kad viena funkcijos $\frac{2x}{x^2+1}$ pirmykštė yra $\ln(x^2+1)$. Jei tarsime, kad $y=\sin x$, tai įsitikinsime, kad viena funkcijos $\frac{\cos x}{\sin x}$ pirmykštė yra $\ln|\sin x|$.

Atskiras įrodytos teoremos atvejis yra teiginys, parašytas mokymo priemonėje „Algebra ir analizės pradmenys IX—XI klasei“.

Jei $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė, tai $\frac{1}{a}F(ax+b)$ yra funkcijos $f(ax+b)$ pirmykštė (šiuo atveju $\varphi(x)=ax+b$, o $\varphi'(x)=$ $=a$).

5 pavyzdys. Raskime atskirą diferencialinės lygties

$$\sin^2 x\cdot y'=\cos x$$

sprendinį, atitinkantį pradinę sąlygą $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$.

Sprendimas. Pateiktą lygtį parašę šitaip: $y'=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, nagrinėkime funkciją $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. Jei $u=\sin x$, tai $u'=\cos x$, todėl vietoj reiškinio $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ galima rašyti $\frac{1}{u^2}\cdot u'$. Kadangi funkcijos $\frac{1}{x^2}$ pirmykštė yra $-\frac{1}{x}$, tai pagal įrodytą teoremą funkcijos $\frac{1}{u^2}\cdot u'$ pirmykštė yra $-\frac{1}{u}$.

Vadinasi, viena funkcijos $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ pirmykštė bus $-\frac{1}{\sin x}$, o bendrasis nagrinėjamos diferencialinės lygties sprendinys toks:

$$y=-\frac{1}{\sin x}+C.$$

Atsižvelgę į pradinę sąlygą $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$, gaunamė

$$2=-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}+C,$$

todėl $2=-2+C$; $C=4$. Ieškomasis atskiras sprendinys yra $y=$ $=4-\frac{1}{\sin x}$.

6 pavyzdys. Išspręskime diferencialinę lygtį $y'=\frac{x}{1-x^2}$.

Sprendimas. Jei $u=1-x^2$, tai $u'=-2x$, todėl

$$\frac{x}{1-x^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{1-x^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\cdot u'.$$

Kadangi viena funkcijos $\frac{1}{x}$ pirmykštė yra $\ln|x|$, tai, remiantis teorema, funkcijos $\frac{1}{u}\cdot u'$ viena pirmykštė bus $\ln|u|$, t. y. $\ln|1-x^2|$. Vadinasi, bendrasis nagrinėjamos diferencialinės lygties sprendinys yra

$$y=-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|-\frac{1}{2}\ln|C|$$

(čia laisvąją konstantą patogu rašyti, kaip nurodyta: $-\frac{1}{2}\ln|C|$), arba

$$y=-\frac{1}{2}\ln C(1-x^2).$$

16. Fizikos uždaviniai, pakeičiami lygtimi $y'=f(x)$. Jei taškas juda tiese ir momentu t jo koordinatė lygi $x(t)$, o momentinis greitis lygus $v(t)$, tai $x'(t)=v(t)$. Vadinasi, ieškant judėjimo dėsnio $x(t)$, kai žinomas greitis $v(t)$, reikia spręsti diferencialinę lygtį $x'=v(t)$.

Norint sužinoti koordinatės $x(t)$ pokytį per laiką nuo $t=a$ iki $t=b$, t. y. skirtumą $x(b)-x(a)$, reikia rasti funkcijos $v(t)$ pirmykštės reikšmių skirtumą, būtent, apskaičiuoti integralą

$$\int_a^b v(t)\,dt.$$

Panašiai daroma ir sprendžiant kitus uždavinius: jei ieškomasis dydis y nusakomas diferencialine lygtimi $y'=f(x)$, tai jo pokytis, kai argumentas x kinta nuo reikšmės a iki reikšmės b, reiškiamas integralu $\int_a^b f(x)\,dx$.

7 p a v y z d y s. Veikiamas kintamos jėgos $f(x)$ ašimi Ox juda materialus taškas. Apskaičiuokime darbą, kurį atlieka ta jėga atkarpoje nuo $x=a$ iki $x=b$.

S p r e n d i m a s. Jėgos f atliktas darbas A priklauso nuo nueito kelio. Jei taškas nueina trumpą kelio atkarpą $[x, x+\Delta x]$, tai jėga tame tarpe mažai pakinta, todėl ją galima laikyti lygia jėgos reikšmei atkarpos pradžioje, būtent, $f(x)$. Todėl darbas ΔA intervale $[x, x+\Delta x]$ išreiškiamas apytiksle formule $\Delta A\approx f(x)\Delta x$, iš kurios išplaukia $\frac{\Delta A}{\Delta x}\approx f(x)$. Eidami prie ribos, kai $\Delta x\to 0$, gauname tikslią lygybę $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x}=f(x)$. Kadangi $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x}=A'$, tai gautoji lygybė yra diferencialinė lygtis $A'=f(x)$. Integruodami gauname

$$A=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Kaip pavyzdį apskaičiuosime darbą, kurį reikia atlikti, tempiant pusiausvirą spyruoklę. Pagal Huko dėsnį spyruoklės tempimo jėga proporcinga jos pailgėjimui, t. y. $f(x)=kx$. Todėl, norint ištempti spyruoklę a cm, reikia atlikti darbą, lygų

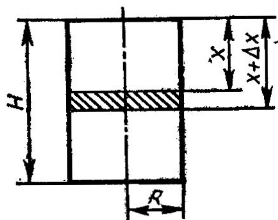
$$\int_0^a kx\,dx=\frac{kx^2}{2}\Big|_0^a=\frac{ka^2}{2}.$$

8 p a v y z d y s. Iš vertikalios cilindrinės cisternos, kurios pagrindo spindulys lygus R, o aukštis H, pumpuojamas vanduo. Apskaičiuokime, koks darbas atliktas, išpumpavus vandenį.

S p r e n d i m a s. Remsimės tuo, kad darbas, kurį reikia atlikti, keliant kūną iš vieno aukščio į kitą, lygus kūno svorio ir aukščių skirtumo sandaugai.

Cilindrą suskirstykime į dalis plokštumomis, lygiagrečiomis cisternos pagrindo plokštumai ir mažai nutolusiomis viena nuo kitos. 11 paveiksle parodytas vienas šitaip gautas „elementarusis cilindras“ (jo ašinis pjūvis). Jį iš turimo cilindro iškerta dvi plokštumos, kurių atstumai nuo viršutinio pagrindo plokštumos lygūs x ir $x+\Delta x$. To cilindro tūris lygus $\pi R^2\Delta x$, todėl jo svoris lygus $\pi R^2 g\Delta x$. Darbą, atliekamą keliant šį „elementarųjį svorį“ į aukštį x, žymėkime ΔA. Jis apskaičiuojamas pagal apytikslę formulę

$$\Delta A\approx\pi R^2 g\Delta x\cdot x.$$



11 pav.

Iš čia

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx \pi R^2 g x,$$

todėl, eidami prie ribos, kai $\Delta x \to 0$, gauname diferencialinę lygtį

$$A' = \pi R^2 g x.$$

Diferencialinė lygtis sudaryta. Norint apskaičiuoti darbą, atliktą perėjus nuo pradinio aukščio $x=0$ iki galinio $x=H$, reikia apskaičiuoti integralą

$$\int_0^H \pi R^2 g x dx.$$

Gauname

$$A = \int_0^H \pi R^2 g x dx = \pi R^2 g \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H^2 g}{2}.$$

9 pavyzdys. Masės M diskas, kurio spindulys lygus R, šukasi apie ašį, einančią per disko centrą ir statmeną jo plokštumai. Apskaičiuokime disko kinetinę energiją, kai sukimosi kampinis greitis lygus ω.

Sprendimas. Diską padalykime į elementarius skritulinius žiedus (12 pav.). Jei žiedo atstumas nuo disko centro lygus r, o plotis lygus Δr, tai jo masė Δm apytiksliai lygi $2\pi r \varrho \Delta r$; čia $\varrho = \frac{M}{\pi R^2}$ — paviršinis tankis. Vadinasi, $\Delta m \approx \frac{2\pi r M \Delta r}{\pi R^2}$. Žiedo sukimosi linijinis greitis v lygus ωr. Todėl to žiedo kinetinė energija ΔK apytiksliai apskaičiuojama pagal formulę

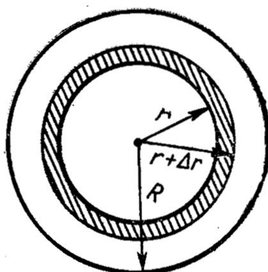
$$\Delta K \approx \Delta m \cdot \frac{v^2}{2} \approx \frac{2\pi r M \Delta r}{\pi R^2} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2} = \frac{M}{R^2} \omega^2 r^3 \Delta r.$$

Iš čia gauname $\frac{\Delta K}{\Delta r} \approx \frac{M}{R^2} \omega^2 r^3$, todėl $K' = \frac{M\omega^2}{R^2} r^3$.

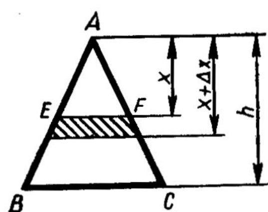
Vadinasi,

$$K = \int_0^R \frac{M\omega^2}{R^2} r^3 dr = \frac{M\omega^2}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{MR^2\omega^2}{4}.$$

10 pavyzdys. Trikampė plokštelė, kurios pagrindas a, o aukštis h, panardinta vertikaliai į skystį. Jos viršūnė yra skysčio paviršiuje, o pagrindas horizontalus. Raskime skysčio slėgį į tą plokštelę.



12 pav.



13 pav.

S p r e n d i m a s. Remsimės Paskalio dėsniu, pagal kurį skysčio slėgis P į ploto S plokštelę, nugramzdintą į gylį r, apskaičiuojamas šitaip:

$$P=\varrho g r S;$$

ϱ — skysčio tankis, g — sunkio pagreitis. Sudarykime horizontalią pločio Δx juostelę, nugramzdintą į gylį x (13 pav.). Laikydami šią juostelę stačiakampiu, rasime jos pagrindą $|EF|$. Iš trikampių ABC ir AEF panašumo išplaukia proporcija $\frac{a}{|EF|}=\frac{h}{x}$. Iš jos gauname $|EF|=\frac{ax}{h}$. Todėl juostelės plotas ΔS maždaug lygus $\frac{ax}{h}\cdot\Delta x$:

$$\Delta S\approx\frac{ax}{h}\Delta x.$$

Pagal Paskalio dėsnį slėgis ΔP į nagrinėjamąją juostelę apskaičiuojamas pagal formulę

$$\Delta P\approx\varrho g x\cdot\frac{ax}{h}\Delta x=\frac{\varrho g a}{h}x^2\Delta x.$$

Iš čia gauname $\frac{\Delta P}{\Delta x}\approx\frac{\varrho g a}{h}x^2$, todėl $P'=\frac{\varrho g a}{h}x^2$. Apskaičiuojame skysčio slėgį P į visą plokštelę ABC (jį gauname, argumentą x keisdami nuo 0 iki h):

$$P=\int_0^h\frac{\varrho g a}{h}x^2dx=\frac{\varrho g a}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\varrho g a h^2.$$

17. Diferencialinės lygtys $y'=f(y)$. Spręsdami šitą lygtį, abi jos puses dalijame iš $f(y)$ (žinoma, tariame, kad $f(y)\neq 0$). Gauname lygtį

$$\frac{y'}{f(y)}=1. \qquad (1)$$

Jei $F(x)$ yra funkcijos $\frac{1}{f(x)}$ pirmykštė, o y — kintamojo x diferencijuojama funkcija, tai $F(y)$ yra funkcijos $\frac{1}{f(y)}\cdot y'$ pirmykštė (žr. 15 skyrelio teoremą). Kadangi 1 yra funkcijos x išvestinė, tai (1) lygtį galima pertvarkyti į lygtį

$$(F(y))'=(x)'.$$

Mokymo priemonėje „Algebra ir analizės pradmenys IX—XI klasei“ pasakyta, kad dvi funkcijos, kurios turi vienodas išvestines, skiriasi tik pastoviu dėmeniu. Iš to aišku, kad $x=F(y)+C$.

Čia gauta ne kintamojo y išraiška kintamuoju x, o atvirkščiai — kintamojo x išraiška kintamuoju y. Kartais iš lygybės $x=F(y)+C$ pavyksta y išreikšti kintamuoju x. Jei tai neįmanoma, tai lygybė $x=F(y)+C$ laikoma atsakymu ir sakoma, kad sprendinys pateiktas neišreikštine forma.

Prie $y'=f(y)$ tipo lygčių priklauso 1 skyrelyje nagrinėta rodiklinio augimo lygtis $y'=ky$. Iš tos lygties gauname $\frac{y'}{y}=k$, t. y. $(\ln y)'=(kx)'$, todėl $\ln y=kx+\ln C$, arba

$$y=Ce^{kx}.$$

Prie to paties tipo lygčių priklauso ir lygtis $y'=-k(y-\alpha)$, apibūdinanti išlyginamąjį procesą (žr. 3 skyrelį). Iš tos lygties gauname $\frac{y'}{y-\alpha}=-k$, t. y. $(\ln(y-\alpha))'=(-kx)'$, todėl $\ln(y-\alpha)=-kx+\ln C$, $y-\alpha=Ce^{-kx}$,

$$y=\alpha+Ce^{-kx}.$$

11 pavyzdys. Baikime spręsti vandens tekėjimo iš cilindrinio indo uždavinį (žr. 14 skyrelio 11 pavyzdį).

Sprendimas. Jau buvo sudaryta diferencialinė lygtis $-\pi R^2h'=k\sqrt{2gh}\,S$ (žr. (16) lygtį, p. 31), iš kurios reikia rasti h — vandens stulpelio aukštį momentu t. Tą lygtį pertvarkysime šitaip: $-\frac{\pi R^2}{k\sqrt{2g}\,S}\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}\cdot h'=1$ ir tarsime, kad $\frac{\pi R^2}{k\sqrt{2g}\,S}=A$. Tuomet lygtį galėsime parašyti trumpiau:

$$-A\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}\cdot h'=1.$$

Kadangi $h^{-\frac{1}{2}}\cdot h'=(2h^{\frac{1}{2}})'$, tai sprendžiamą lygtį galima užrašyti šitaip: $(-2A\sqrt{h})'=1$. Iš čia randame bendrąjį pradinės lygties sprendinį

$$-2A\sqrt{h}=t+C. \qquad (2)$$

Rasime konstantos C reikšmę. Tam panaudosime pradinę sąlygą. Uždavinyje pasakyta, kad iš pradžių indas buvo pilnas, t. y. vandens stulpelio aukštis buvo lygus H. Kitaip sakant, $h=H$, kai $t=0$. Į (2) formulę įrašę reikšmes $t=0$ ir $h=H$, gauname $-2A\sqrt{H}=C$, todėl vietoj (2) lygybės galima rašyti

$$t=2A(\sqrt{H}-\sqrt{h}). \qquad (3)$$

Norint rasti konstantos A reikšmę, reikia prisiminti, kad per pirmąsias t_1 sekundžių ištekėjo trečdalis vandens. Tai reiškia, kad per tą laiką vandens stulpelio aukštis sumažėjo dydžiu $\frac{H}{3}$. Kitaip sakant, jei $t=t_1$, tai $h=H-\frac{H}{3}=\frac{2}{3}H$. Įrašę šias kintamųjų t ir h reikšmes į (3) lygybę, gauname

$$t_1=2A\left(\sqrt{H}-\sqrt{\frac{2}{3}H}\right),$$

todėl

$$A=\frac{t_1}{2\left(\sqrt{H}-\sqrt{\frac{2}{3}H}\right)}=\frac{3t_1\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{2\sqrt{H}}.$$

Dabar jau lengva sužinoti, per kiek laiko ištuštės indas: reikia rasti t reikšmę, su kuria $h=0$:

$$t=2A(\sqrt{H}-\sqrt{0})=\frac{3t_1\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\sqrt{H}}\cdot\sqrt{H}=3t_1\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Gautoji t reikšmė yra $1+\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 1{,}82$ kartų didesnė už reikšmę $3t_1$, kurią būtume gavę, tardami, kad vanduo išteka tolygiai.

Suprantama, ir šitas sprendinys nėra visiškai tikslus: neatsižvelgta, pavyzdžiui, į kapiliarinius reiškinius (o jie svarbūs, kai skylutės skersmuo labai mažas), nekreipta dėmesio į sūkurius, į vadinamąjį kraštinį sluoksnį (skysčio sluoksnį prie skylutės sienelių, kuriame greičio reikšmės kinta nuo nulio iki v) ir į daugelį kitų faktorių. Bet vis dėlto pastarasis sprendinys yra tikslesnis už sprendinį, pagrįstą prielaida, kad skystis išteka tolygiai.

12 pavyzdys. Baikime spręsti parašiutininko kritimo uždavinį (žr. 8 skyrelio 1 pavyzdį).

Sprendimas. Buvo sudaryta diferencialinė lygtis $my''=mg-ky'$ (žr. (1) lygtį, p. 19), kurios ieškoma funkcija y reiškia atstumą nuo parašiutininko vietos pradiniu momentu iki jo vietos momentu t. Kadangi $y'=v$, tai $y''=v'$; todėl lygčiai galima suteikti pavidalą $\frac{mv'}{mg-kv}=1$. Toliau pertvarkome šitaip:

$$-\frac{m}{k}\cdot\frac{v'}{v-\frac{mg}{k}}=1,$$

$$\left(-\frac{m}{k}\ln\left|v-\frac{mg}{k}\right|\right)'=(t)'.$$

Iš čia randame bendrąjį lygties sprendinį

$$-\frac{m}{k}\ln\left|v-\frac{mg}{k}\right|=t-\frac{m}{k}\ln|C|$$

($-\frac{m}{k}\ln|C|$ — patogi laisvosios konstantos išraiška). Gautąją lygybę pertvarkome šitaip:

$$v-\frac{mg}{k}=Ce^{-\frac{k}{m}t}. \qquad (4)$$

Iš uždavinio sąlygos aišku, kad pradinis greitis lygus nuliui: $v=0$, kai $t=0$. Įrašę tas reikšmes į (4) lygybę, sužinome, kad $C=-\frac{mg}{k}$. Todėl vietoj (4) formulės turime

$$v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right). \qquad (5)$$

Iš čia aišku, kad laikui bėgant parašiutininko kritimo greitis artėja prie reikšmės $v_{\text{rib.}}=\frac{mg}{k}$.

Norint sužinoti parašiutininko judėjimo dėsnį, reikia iš gautosios greičio išraiškos rasti kelią, nueitą iki momento t. Tuo tikslu (5) lygybę užrašysime šitaip:

$$y'=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

ir išspręsime gautąją diferencialinę lygtį. Tam reikia rasti funkcijos $\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ pirmykštę. Tai bus funkcija $\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)$. Vadinasi, bendrasis lygties sprendinys yra

$$y=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)+C. \qquad (6)$$

Norint rasti konstantos C reikšmę, reikia atsiminti, kad momentu $t=0$ nueitas kelias buvo lygus nuliui: $y=0$, kai $t=0$. Įrašę tas reikšmes į (6) lygybę, gauname $0=\frac{m^2g}{k^2}+C$, todėl

$$C=-\frac{m^2g}{k^2}.$$

Vadinasi, parašiutininko judėjimo dėsnis išreiškiamas funkcija

$$y=\frac{mg}{k}\left(t-\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right).$$

18. Kulkos judėjimo uždavinys.

13 pavyzdys. Kulka, skriedama 400 m/s greičiu, pramuša 20 cm storio sieną ir išlekia iš jos 100 m/s greičiu. Tardami, kad

sienos pasipriešinimo jėga proporcinga kulkos greičio kvadratui, sužinokime, per kiek laiko kulka perėjo sieną.

Sprendimas. Remdamiesi antruoju Niutono dėsniu, gauname kulkos judėjimo greičio diferencialinę lygtį

$$mv'=-k_1v^2;$$

čia m — kulkos masė, k_1 — proporcingumo koeficientas, $v(t)$ — greitis.

Sakykime, kad $\frac{k_1}{m}=k$. Tuomet lygtį užrašysime šitaip:

$$-\frac{1}{v^2}\cdot v'=k.$$

Iš čia $\left(\frac{1}{v}\right)'=(kt)'$, todėl bendrasis lygties sprendinys yra

$$\frac{1}{v}=kt+C_1. \qquad (7)$$

Konstantos C_1 reikšmę apskaičiuosime, remdamiesi pradine sąlyga $v(0)=400$. Į (7) lygybę įrašę reikšmes $t=0$ ir $v=400$, sužinome, kad $C_1=\frac{1}{400}$. Vadinasi, $\frac{1}{v}=kt+\frac{1}{400}$; todėl

$$v=\frac{400}{1+400\,kt}, \qquad (8)$$

$$y'=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{t+\frac{1}{400k}}. \qquad (9)$$

Iš paskutinės lygties rasime $y(t)$ — kulkos judėjimo sienoje dėsnį. Primename, kad funkcijos $\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{t+\frac{1}{400k}}$ pirmykštė yra $\frac{1}{k}\ln\left(t+\frac{1}{400k}\right)$. Todėl bendrąjį (9) lygties sprendinį galima rašyti šitaip:

$$y=\frac{1}{k}\ln\left(t+\frac{1}{400k}\right)+\frac{1}{k}\ln C,$$

arba

$$y=\frac{1}{k}\ln C\left(t+\frac{1}{400k}\right).$$

Norint rasti konstantos C reikšmę, reikia atsižvelgti į pradinę sąlygą: $y=0$, kai $t=0$. Gauname $0=\frac{1}{k}\ln\left(C\cdot\frac{1}{400k}\right)$, o iš čia $C=400k$. Vadinasi, sužinojome kulkos judėjimo sienoje dėsnį:

$$y=\frac{1}{k}\ln 400k\left(t+\frac{1}{400k}\right)=\frac{1}{k}\ln(1+400kt).$$

Į šią lygybę įrašę reikšmę $y=0{,}2$ (sienos storį), randame kulkos judėjimo sienoje trukmę T: iš lygybės $0{,}2=\frac{1}{k}\ln(1+400kT)$ gauname

$$T=\frac{e^{0{,}2k}-1}{400k}.$$

Dar reikia apskaičiuoti koeficiento k reikšmę. Tam prisiminsime uždavinio sąlygą — iš sienos kulka išlekia 100 m/s greičiu. Tai reiškia, kad $v=100$, kai $t=T$. Šias v ir t reikšmes įrašę į (8) formulę, gauname:

$$100=\frac{400}{e^{0{,}2k}},$$
$$e^{0{,}2k}=4,$$
$$0{,}2k=\ln 4,$$
$$k=5\ln 4.$$

Dabar jau galime rasti skaitinę T reikšmę:

$$T=\frac{e^{0{,}2k}-1}{400k}=\frac{3}{2000\ln 4}\approx 0{,}001\ (\mathrm{s}).$$

19. Cheminių procesų dinamikos diferencialinių lygčių sprendimas. Čia spręsime diferencialines lygtis, kurias sudarėme, nagrinėdami uždavinius (žr. 11 skyrelį).

14 pavyzdys. Išspręskime lygtį $y'=k(a-y)^2$ (žr. (8) lygtį, p. 24).

Sprendimas. Pateiktą lygtį parašome šitaip:

$$\frac{y'}{(y-a)^2}=k. \tag{10}$$

Kadangi funkcijos $\frac{1}{(t-a)^2}$ pirmykštė yra funkcija $-\frac{1}{t-a}$, tai funkcijos $\frac{y'}{(y-a)^2}$ pirmykštė — funkcija $-\frac{1}{y-a}$, t. y. $\frac{1}{a-y}$. Vadinasi, (10) lygtį galima pertvarkyti šitaip:

$$\left(\frac{1}{a-y}\right)'=(kt)'.$$

Iš čia sužinome, kad $\frac{1}{a-y}=kt+C$; todėl $y=a-\frac{1}{kt+C}$.

Kadangi momentu $t=0$ susidarančios medžiagos kiekis buvo lygus nuliui ($y=0$), tai $0=a-\frac{1}{C}$, arba $C=\frac{1}{a}$. Vadinasi,

$$y=a-\frac{a}{1+akt}.$$

Funkcijos $a-\frac{a}{1+akt}$ riba, kai $t\to+\infty$, lygi pradinei reagentų koncentracijai a. Tai reiškia, kad turi susidaryti tiek naujos medžiagos molekulių, kiek buvo reagentų molekulių porų, t. y. reakcija turi vykti iki galo.

15 pavyzdys. Išspręskime lygtį $y'=k(a-y)(b-y)$ (žr. (7) lygtį, p. 24).

Sprendimas. Iš pradžių parodysime, kaip randama funkcijos $\frac{1}{(t-a)(t-b)}$ pirmykštė. Rašome:

$$\frac{1}{(t-a)(t-b)}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(t-a)-(t-b)}{(t-a)(t-b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{t-b}-\frac{1}{t-a}\right).$$

Kadangi funkcijų $\frac{1}{t-b}$ ir $\frac{1}{t-a}$ pirmykštės yra $\ln|t-b|$ ir $\ln|t-a|$, tai funkcijos $\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{t-b}-\frac{1}{t-a}\right)$ pirmykštė bus $\frac{1}{b-a}$ $(\ln|t-b|-$ $-\ln|t-a|)=\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{t-b}{t-a}\right|$.

Dabar sprendžiamą diferencialinę lygtį rašome šitaip:

$$\frac{y'}{(y-a)(y-b)}=k. \qquad (11)$$

Kadangi funkcijos $\frac{1}{(t-a)(t-b)}$ pirmykštė (ką tik įsitikinome) yra $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{t-b}{t-a}\right|$, tai funkcijos $\frac{y'}{(y-b)(y-a)}$ pirmykštė bus $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{y-b}{y-a}\right|$. Vadinasi, bendrąjį (11) lygties sprendinį galima užrašyti šitaip:

$$\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{y-b}{y-a}\right|=kt+\frac{1}{b-a}\ln|C|.$$

Iš tos lygybės gauname

$$\ln\left|\frac{y-b}{y-a}\right|=(b-a)kt+\ln|C|,$$

todėl

$$\frac{b-y}{a-y}=Ce^{(b-a)kt}.$$

Šiuo atveju irgi $y=0$, kai $t=0$. Todėl $\frac{b}{a}=C$. Vadinasi, $\frac{b-y}{a-y}=$ $=\frac{b}{a}e^{(b-a)kt}$. Jei $b<a$, tai $b-a<0$, todėl funkcija $\frac{b}{a}e^{(b-a)kt}$ artėja prie nulio, kai $t\to+\infty$. Tai reiškia, kad y artėja prie reikšmės b. Kitaip sakant, šiuo atveju visiškai sureaguos antroji medžiaga, o pirmosios medžiagos koncentracija artės prie reikšmės $a-b$. Analogiškai aptariamas atvejis $a<b$.

Panašiai sprendžiamos (9) ir (10) lygtys, kurias sudarėme, nagrinėdami 11 skyrelio 7 pavyzdį.

20. Diferencialinės lygtys su atskirtais kintamaisiais. Ir $y'=f(x)$ tipo lygtys, ir $y'=f(y)$ lygtys priklauso vienai klasei, kurią sudaro

$$p(y)y'=q(x) \tag{12}$$

pavidalo lygtys. Kadangi dešinioji (12) lygties pusė priklauso tik nuo x, o kairioji yra kintamojo y funkcijos ir išvestinės y' sandauga, tai tokios lygtys vadinamos *lygtimis su atskirtais kintamaisiais.*

Išspręsime (12) lygtį. Tarkime, kad P yra viena funkcijos p pirmykščių funkcijų, o Q — viena funkcijos q pirmykščių. Tuomet $P(y)$ yra funkcijos $p(y)\cdot y'$ pirmykštė, ir todėl (12) lygtį galima pertvarkyti šitaip:

$$(P(y))'=(Q(x))'.$$

Iš čia sužinome, kad

$$P(y)=Q(x)+C.$$

Gautą (12) lygties sprendinį galima palikti užrašytą neišreikštine forma. Tačiau, jei įmanoma, geriau y išreikšti kintamuoju x.

16 pavyzdys. Raskime lygties $\cos y\cdot y'=1+x^2$ sprendinį, atitinkantį pradinę sąlygą $y(0)=\frac{\pi}{6}$.

Sprendimas. Pateiktą lygtį galima pakeisti lygtimi

$$(\sin y)'=\left(x+\frac{x^3}{3}\right)'.$$

Iš čia randame pradinės lygties bendrąjį sprendinį

$$\sin y=x+\frac{x^3}{3}+C.$$

Norint rasti konstantos C reikšmę, į gautą lygybę įrašoma pradinė sąlyga: $y=\frac{\pi}{6}$, kai $x=0$. Gauname lygybę $\sin\frac{\pi}{6}=C$, iš kurios sužinome, kad $C=\frac{1}{2}$. Vadinasi, ieškomas atskirasis sprendinys parašomas šitaip:

$$\sin y=x+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}.$$

Jei $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, tai galima y išreikšti kintamuoju x:

$$y = \arcsin\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\right).$$

17 pavyzdys. Raskime lygties $y' = -\frac{y}{x}$ atskirą sprendinį, atitinkantį pradinę sąlygą $y(a) = b$ (žr. 13 skyrelio 7 pavyzdį).

Sprendimas. Nagrinėjamą lygtį pakeisime lygtimi

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}.$$

Tai lygtis su atskirais kintamaisiais, kurią galima užrašyti šitaip:

$$(\ln y)' = (-\ln x)'.$$

Iš čia sužinome, kad $\ln y = -\ln x + \ln C$, arba

$$y = \frac{C}{x}.$$

Remdamiesi pradine sąlyga, rašome lygybę $b = \frac{C}{a}$, iš kurios $C = ab$.

Vadinasi, $y = \frac{ab}{x}$ ieškotas atskiras sprendinys. Iš 13 skyrelio 7 pavyzdžio aišku, kad sudarėme lygtį kreivės, kuri eina per tašką $P(a, b)$ ir turi šią savybę: kreivės liestinės atkarpą, įterptą tarp koordinačių ašių, lietimosi taškas dalija pusiau (žr. 8 pav.).

18 pavyzdys. Fizikoje įrodoma, kad, adiabatiškai slegiant idealiąsias dujas, tūrio V kitimo greitį ir temperatūros T kitimo greitį sieja lygtis

$$-(H-1)\frac{T}{V} \cdot V' = T'; \qquad (13)$$

čia V ir T yra laiko t funkcijos, o H — konstanta, reiškianti santykį dujų šiluminės talpos, kai slėgis pastovus, ir šiluminės talpos, kai tūris pastovus. Išspręskime (13) lygtį.

Sprendimas. Pagal sudėtinės funkcijos išvestinės formulę $V' = V'_T \cdot T'$, todėl $\frac{V'}{T'} = V'_T$. Vadinasi, (13) lygtį galima pakeisti lygtimi

$$\frac{-(H-1)T}{V} \cdot V'_T = 1,$$

arba

$$\frac{(H-1)V'_T}{V} = -\frac{1}{T}.$$

Gavome lygtį su atskirtais kintamaisiais. Ją išsprendę, gauname

$$(H-1)\ln V=-\ln T+\ln C,$$

arba

$$V^{H-1}=\frac{C}{T}.$$

Galutinai

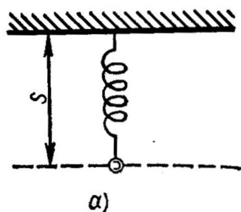
$$T\cdot V^{H-1}=C.$$

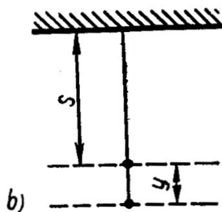
Vadinasi, slegiant idealiąsias dujas adiabatiškai, sandauga $T\cdot V^{H-1}$ yra pastovi (slegiant izotermiškai, pastovi yra sandauga TV).

21. Harmoninio svyravimo diferencialinė lygtis. Ant spyruoklės pakabintas masės m rutuliukas (14 pav., *a*). Nekreipiant dėmesio į aplinkos pasipriešinimą, galima tarti, kad rutuliuką veikia dvi jėgos: sunkis $F_1=mg$ ir spyruoklės pasipriešinimo jėga F_2, kuri pagal Huko dėsnį yra proporcinga ilgiui atkarpos, į kurią rutuliukas ištempia spyruoklę. Ta jėga lygi $-ks$, kai rutuliukas yra pusiausviras (s — atstumas nuo nejudančio rutuliuko iki spyruoklės pakabinimo taško), ir $F_2=-k(s+y)$, kai rutuliukas nuo pusiausvyros padėties nustolsta atstumu y. Pusiausviroje būsenoje $F_1+F_2=0$, t. y. $mg=ks$ (tariame, kad suspaustos spyruoklės ilgis lygus nuliui).

Jei rutuliuką patempsime žemyn ir paleisime, tai jis pradės svyruoti apie savo pusiausvyros tašką. Tarkime, kad momentu t jo atstumas nuo pusiausvyros taško lygus y (14 pav., *b*). Atstojamoji jėga, veikianti rutuliuką tuo momentu, lygi $F=F_1+F_2=$ $=mg-k(s+y)=-ky$. Antra vertus, pagal antrąjį Niutono dėsnį ta jėga lygi ma, t. y. my''. Vadinasi, gauname diferencialinę lygtį $my''=-ky$. Tarę, kad $\frac{k}{m}=\omega^2$, turime lygtį

$$y''+\omega^2 y=0. \qquad (14)$$





14 pav.

Tą lygtį galima išspręsti gražiu dirbtiniu būdu. Abi lygties puses padauginę iš $2y'$, gauname

$$2y'y''+2\omega^2yy'=0. \qquad (15)$$

Prisiminę, kad funkcijos $(y')^2$ išvestinė lygi $2y'(y')'$, t. y. $2y'y''$, o funkcijos y^2 išvestinė lygi $2y \cdot y'$, vietoj (15) lygties rašome

$$((y')^2)'=(-\omega^2y^2)'.$$

Iš čia gauname

$$(y')^2=-\omega^2y^2+C.$$

Iš gautos lygybės matyti, kad konstanta C turi būti teigiama. Atsižvelgdami į tai, konstantai C suteikiame formą, patogesnę tolesniems pertvarkymams, būtent, $C_1^2\omega^2$. Taigi

$$(y')^2=-\omega^2y^2+C_1^2\omega^2;$$

iš čia

$$y'=\pm\omega\sqrt{C_1^2-y^2},$$

arba

$$\frac{y'}{\sqrt{C_1^2-y^2}}=\pm\omega. \qquad (16)$$

Kadangi funkcijos $\frac{1}{\sqrt{C_1^2-t^2}}$ pirmykštė yra $\arcsin\frac{t}{C_1}$ (15 skyrelis), tai funkcijos $\frac{y'}{\sqrt{C_1^2-y^2}}$ pirmykštė yra $\arcsin\frac{y}{C_1}$. Todėl vietoj (16) lygties galima parašyti lygtį

$$\left(\arcsin\frac{y}{C_1}\right)'=(\pm\omega t)',$$

iš kurios gauname

$$\arcsin\frac{y}{C_1}=\pm\omega t\pm\varphi$$

(laisvąją konstantą pažymėjome $\pm\varphi$). Toliau rašome šitaip:

$$\frac{y}{C_1}=\pm\sin(\omega t+\varphi),$$

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)$$

(konstantą $\pm C_1$ pažymėjome raide A).

Vadinasi, (14) lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=A\sin(\omega t+\varphi).$$

Tai harmoninio (sinusinio) svyravimo dėsnis, todėl (14) lygtis dažniausiai vadinama harmoninio svyravimo diferencialine lygtimi.

Gautą sprendinį galima užrašyti kitaip:

$$y = A(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi).$$

Jei $A \cos \varphi$ ir $A \sin \varphi$ pažymėsime atitinkamai C_1 ir C_2, tai sprendinį galėsime užrašyti šitaip:

$$y = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Anksčiau, nagrinėdami fantastinio kūno judėjimą tiesiu tuneliu, jungiančiu Šiaurės ir Pietų polius (žr. 8 skyrelio 3 pavyzdį), sudarėme lygtį $y'' = -\frac{gy}{R}$. Tai harmoninio svyravimo lygtis (užtenka ją pertvarkyti į lygtį $y'' + \frac{g}{R} y = 0$ ir laikyti, kad $\frac{g}{R} = \omega^2$). Vadinasi, fantastinis kūnas harmoniškai svyruos apie Žemės centrą.

Nagrinėdami matematinės svyruoklės svyravimą (žr. 8 skyrelio 4 pavyzdį), sudarėme diferencialinę lygtį

$$l\varphi'' = -g \sin \varphi. \quad (17)$$

Jei kampas φ pakankamai mažas, tai $\sin \varphi \approx \varphi$, todėl tokiu atveju (17) lygtį galima pakeisti lygtimi $\varphi'' + \frac{g}{l} \varphi = 0$. Tai irgi harmoninio svyravimo lygtis, t. y. kampo didumas φ kinta pagal sinusinį dėsnį.

22. Antrasis kosminis greitis. Sakykime, kad nuo Žemės paviršiaus startuoja raketa pradiniu greičiu v_0. Jei greitis būtų palyginti nedidelis, tai, pasiekusi tam tikrą aukštį, raketa pradėtų kristi Žemėn, veikiama sunkio jėgos (į oro pasipriešinimą neatsižvelgiame). Remiantis mechanikos dėsniais, pavyko apskaičiuoti pirmąjį kosminį greitį v_1. Raketa pradeda skrieti apskrita orbita kaip palydovas, paleidus ją horizontalia kryptimi iš taško, esančio virš Žemės paviršiaus, pradiniu greičiu $v_1 = 7{,}90$ km/s.

Dabar rasime pradinį greitį v_2, kurį suteikus vertikaliai kylančiai raketai, ji gali nutolti bet kokiu atstumu nuo Žemės. Ta pradinio greičio reikšmė v_2 vadinama *antruoju kosminiu greičiu.*

Anksčiau (žr. 8 skyrelio 2 pavyzdį) įsitikinome, kad raketos judėjimo diferencialinė lygtis nagrinėjamu atveju yra

$$y'' = -\frac{gR^2}{y^2}.$$

Šitai lygčiai spręsti taikysime tą metodą, kuriuo 21 skyrelyje sprendėme harmoninio svyravimo lygtį: abi lygties puses padauginsime iš $2y'$. Tuomet gausime lygtį

$$2y'y'' = -\frac{2gR^2}{y^2} y',$$

arba

$$((y')^2)' = \left(2gR^2 \cdot \frac{1}{y}\right)'.$$

Iš čia sužinome, kad

$$(y')^2 = \frac{2gR^2}{y} + C.$$

Kadangi $y' = v$, tai

$$v^2 = \frac{2gR^2}{y} + C. \quad (18)$$

Konstantos C reikšmę rasime, atsižvelgę į pradinę sąlygą: momentu $t=0$ raketa startuoja nuo Žemės paviršiaus pradiniu greičiu $v = v_2$, jos atstumas y nuo Žemės centro tuomet lygus R. Šias v ir y reikšmes įrašę į (18) lygybę, gauname

$$v_2^2 = \frac{2gR^2}{R} + C,$$

todėl

$$C = v_2^2 - 2gR.$$

Su šia konstantos C reikšme (18) lygybė tampa šitokia:

$$v^2 = \frac{2gR^2}{y} + v_2^2 - 2gR. \quad (19)$$

Jei raketa gali pasiekti bet kokį aukštį y, tai trupmenos $\frac{2gR^2}{y}$ reikšmė gali pasidaryti kiek norima maža. Todėl iš (19) lygybės išplaukia, kad turi būti teisinga nelygybė $v_2^2 - 2gR \geqslant 0$. Mažiausia v_2 reikšmė, su kuria teisinga ši nelygybė, lygi $\sqrt{2gR}$.

Vadinasi, antrasis kosminis greitis apskaičiuojamas pagal formulę $v_2 = \sqrt{2gR}$. Kadangi $R = 6370$ km, $g = 0{,}00981$ km/s^2, tai

$$v^2 = \sqrt{2 \cdot 0{,}00981 \cdot 6370} \approx 11{,}19 \text{ (km/s)}.$$

23. Kolonijos organizmų kiekio radimas.

19 pavyzdys. Išspręskime diferencialinę lygtį

$$y' = \alpha y - \beta y^2,$$

kurią gavome 12 skyrelyje, spręsdami izoliuotos (t. y. be plėšrūnų) kolonijos organizmų kiekio y uždavinį, kai gyvenamoji erdvė yra ribota (t. y. atsižvelgiama į vidinius konfliktus dėl maisto išteklių). Tarkime, kad pradiniu momentu $t=0$ kolonijos organizmų skaičius lygus y_0, t. y. $y(0) = y_0$.

Sprendimas. Lygtį $y' = \alpha y - \beta y^2$ užrašome šitaip:

$$\frac{y'}{y\left(y - \frac{\alpha}{\beta}\right)} = -\beta.$$

Matome, kad pastaroji lygtis gaunama iš 19 skyrelio (11) lygties, kai $a=0$, $b=\frac{\alpha}{\beta}$ ir $k=-\beta$. Todėl atsakymą galima parašyti pagal formulę $\frac{y-b}{y-a}=Ce^{(b-a)kt}$ (žr. p. 46):

$$\frac{y-\frac{\alpha}{\beta}}{y}=Ce^{-\alpha t}.$$

Iš tos lygybės išreiškiame kintamąjį y:

$$y=\frac{\alpha}{\beta(1-Ce^{-\alpha t})}. \qquad (20)$$

Konstantą C randame, remdamiesi pradine sąlyga $y(0)=y_0$. Kadangi $y_0=\frac{\alpha}{\beta(1-C)}$, tai $C=1-\frac{\alpha}{\beta y_0}$. Įrašę tą C reikšmę į (20) lygybę ir atitinkamai suprastinę, gauname

$$y=\frac{\alpha y_0}{\beta y_0+(\alpha-\beta y_0)e^{-\alpha t}}. \qquad (21)$$

Susitariame žymėti taip: $a=\beta y_0$, $b=\alpha-\beta y_0$. Atkreipiame dėmesį į tai, kad $a>0$. Be to, iš uždavinio prasmės galima suprasti, kad koeficientas α tiek didesnis už koeficientą β, kad $\alpha-\beta y_0>0$, t. y. $b>0$. Dabar (21) lygybę galima parašyti paprasčiau:

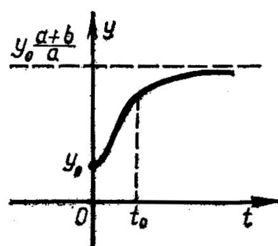
$$y=\frac{(a+b)y_0}{a+be^{-\alpha t}}=\frac{(a+b)y_0e^{\alpha t}}{b+ae^{\alpha t}}.$$

Jei b daug didesnis už a, tai, esant mažoms t reikšmėms, vardiklis apytiksliai lygus $a+b$. Todėl y didėja pagal dėsnį, kuris mažai skiriasi nuo rodiklinio augimo dėsnio: $y\approx y_0e^{\alpha t}$. Kai t reikšmės didelės, dėmuo $ae^{\alpha t}$ pasidaro daug didesnis už b. Tuomet y reikšmė apytiksliai lygi $\frac{(a+b)y_0e^{\alpha t}}{ae^{\alpha t}}$, t. y. $y_0\frac{a+b}{a}$. Funkcijos y grafikas pavaizduotas 15 paveiksle, kuris vaizdžiai parodo, kaip rodiklinį augimą pakeičia išlyginamasis procesas. Toks augimo dėsnis vadinamas *logistiniu,* o kreivė — *logistine kreive.*

20 p a v y z d y s. Spręsdami plėšrūnų ir jų aukų uždavinį, 12 skyrelyje sudarėme diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} y'=\alpha y-\beta xy, \\ x'=\gamma xy-\delta x; \end{cases} \qquad (22)$$

čia y reiškia plėšrūnų aukų skaičių, x — plėšrūnų skaičių, o y' ir x' — išvestines laiko t atžvilgiu. Raskime kintamųjų x ir y priklausomybę.



15 pav.

Sprendimas. Pagal sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklę rašome: $y'_t = y'_x \cdot x'_t$. Todėl $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Iš (22) sistemos gauname

$$\frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\alpha y - \beta xy}{\gamma xy - \delta x}, \text{ t. y. } y' = \frac{y(\alpha - \beta x)}{x(\gamma y - \delta)}.$$

Iš paskutinės lygybės išplaukia

$$\frac{\gamma y - \delta}{y} y' = \frac{\alpha - \beta x}{x},$$

arba

$$\left(\gamma - \frac{\delta}{y}\right) y' = \frac{\alpha}{x} - \beta.$$

Šitą lygtį galima užrašyti taip:

$$(\gamma y - \delta \ln y)' = (\alpha \ln x - \beta x)'.$$

Vadinasi,

$$\gamma y - \delta \ln y = \alpha \ln x - \beta x + \ln C,$$

t. y.

$$\ln C x^{\alpha} e^{-\beta x} = \ln e^{\gamma y} y^{-\delta},$$

arba

$$C x^{\alpha} e^{-\beta x} = y^{-\delta} e^{\gamma y}.$$

Šia lygybe aukų skaičius y siejamas su plėšrūnų skaičiumi x. Konstantos C reikšmė randama, žinant pradines x ir y reikšmes.

24. Tiesinės pirmos eilės diferencialinės lygtys. Spręsdami daugelį uždavinių, gauname tokias diferencialines lygtis:

$$y' + p(x) y = q(x). \qquad (23)$$

Kadangi šiose lygtyse ir ieškomoji funkcija, ir jos išvestinė parašyta pirmuoju laipsniu (tiesiškai), tai jos vadinamos *tiesinėmis pirmos eilės diferencialinėmis lygtimis.* Pavyzdžiui, 10 skyrelyje sudaryta diferencialinė lygtis, iš kurios reikia rasti srovės stiprį paprasčiausioje elektrinėje grandinėje (žr. (6) lygtį, p. 23), yra tiesinė (paskui grįšime prie tos lygties).

Šiame skyrelyje aiškinsime, kaip sprendžiama (23) lygtis.

Tarę, kad $P(x)$ yra funkcijos $p(x)$ pirmykštė, apskaičiuokime funkcijos $e^{P(x)} \cdot y$ išvestinę:

$$(e^{P(x)} \cdot y)' = e^{P(x)} \cdot P'(x) \cdot y + e^{P(x)} \cdot y' = e^{P(x)} (p(x) y + y').$$

Kadangi paskutiniuose skliaustuose esantis reiškinys sutampa su (23) lygties kairiąja puse, tai aišku, kad, sprendžiant tą lygtį, reikia abi jos puses padauginti iš $e^{P(x)}$. Tuomet gausime lygtį

$$e^{P(x)} \cdot (y' + p(x) y) = q(x) e^{P(x)},$$

arba

$$(e^{P(x)}\cdot y)'=q(x)e^{P(x)}.$$

Jei funkcijos $q(x)e^{P(x)}$ pirmykštė yra $S(x)$, tai

$$(e^{P(x)}\cdot y)'=(S(x))'.$$

Vadinasi, $e^{P(x)}y=S(x)+C$, todėl

$$y=e^{-P(x)}\cdot(S(x)+C). \qquad (24)$$

Taigi, norint išspręsti (23) tiesinę lygtį, reikia:

a) rasti funkcijos $p(x)$ pirmykštę $P(x)$;

b) rasti funkcijos $q(x)\cdot e^{P(x)}$ pirmykštę $S(x)$;

c) užrašyti atsakymą pagal (24) formulę.

21 pavyzdys. Išspręskime diferencialinę lygtį

$$y'-\frac{3y}{x}=x^3 \quad (x>0). \qquad (25)$$

Sprendimas. Tai tiesinė lygtis. Šiuo atveju $p(x)=-\frac{3}{x}$, $q(x)=x^3$. Sprendžiame pagal ką tik sudarytą sprendimo planą.

a) Funkcijos $-\frac{3}{x}$ pirmykštė yra $-3\ln x$.

b) Sudarome funkciją $q(x)\cdot e^{P(x)}$, būtent, $x^3\cdot e^{-3\ln x}=$ $=x^3\cdot(e^{\ln x})^{-3}=x^3\cdot x^{-3}=1$. Funkcijos 1 pirmykštė yra x, todėl $S(x)=x$.

c) Užrašome atsakymą pagal (24) formulę:

$$y=e^{3\ln x}(x+C)=x^3(x+C)=x^4+Cx^3.$$

Vadinasi, bendrasis (25) lygties sprendinys yra

$$y=x^4+Cx^3.$$

22 pavyzdys. Išspręskime diferencialinę lygtį $E=RI+LI'$ srovės stipriui paprasčiausioje elektrinėje grandinėje apskaičiuoti, kai elektrovaros jėga kinta pagal sinusinį dėsnį: $E(t)=E_0\sin\omega t$. Srovės stiprį pradiniu momentu (kai $t=0$) laikysime lygiu nuliui (srovės įjungimo momentas).

Sprendimas. Sprendžiamą lygtį užrašę $I'+\frac{R}{L}I=$ $=\frac{E_0}{L}\sin\omega t$ pavidalu, tarsime, kad $\frac{R}{L}=a$, $\frac{E_0}{L}=b$. Tuomet lygtis bus

$$I'+aI=b\sin\omega t.$$

Tai tiesinė pirmos eilės diferencialinė lygtis. Ją spręsime pagal anksčiau sudarytą planą. Šiuo atveju $p(t)=a$, $q(t)=b\sin\omega t$.

a) Randame funkcijos $p(t)=a$ pirmykštę $P(t)=at$.

b) Randame funkcijos $q(t)e^{P(t)}=be^{at}\sin\omega t$ pirmykštę $S(t)=$ $=\frac{be^{at}}{a^2+\omega^2}(a\sin\omega t-\omega\cos\omega t)$ (patikrinkite!).

c) Pagal (24) formulę rašome atsakymą:

$$I=e^{-at}\left(\frac{be^{at}}{a^2+\omega^2}(a\sin\omega t-\omega\cos\omega t)+C\right).$$

Atsižvelgę į pradinę sąlygą $I(0)=0$, gauname lygybę $0=$ $=C+\frac{b}{a^2+\omega^2}\cdot(-\omega)$, iš kurios sužinome, kad $C=\frac{b\omega}{a^2+\omega^2}$. Todėl

$$I=e^{-at}\left(\frac{be^{at}}{a^2+\omega^2}(a\sin\omega t-\omega\cos\omega t)+\frac{b\omega}{a^2+\omega^2}\right)=$$

$$=\frac{b}{a^2+\omega^2}\cdot(a\sin\omega t-\omega\cos\omega t)+\frac{b\omega}{a^2+\omega^2}e^{-at}=$$

$$=\frac{b}{a^2+\omega^2}\cdot\sqrt{a^2+\omega^2}\sin(\omega t-\alpha)+\frac{b\omega}{a^2+\omega^2}e^{-at}$$

(čia $\frac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}}=\sin\alpha$, $\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}=\cos\alpha$). Vadinasi,

$$I=\frac{b\omega}{a^2+\omega^2}e^{-at}+\frac{b}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\sin(\omega t-\alpha).$$

Iš paskutinės formulės matyti, kad, esant stacionariam režimui (kai $t\to+\infty$) ir sinusinei šaltinio elektrovaros jėgai, srovės stiprumas irgi bus sinusinis:

$$I=\frac{b}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\sin(\omega t-\alpha).$$

25. Homogeninės pirmos eilės diferencialinės lygtys. Diferencialinėmis lygtimis su atskirtais kintamaisiais (žr. 20 skyrelį) pakeičiamos kai kurių kitų tipų pirmos eilės diferencialinės lygtys. Pavyzdžiui, jomis pakeičiamos $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ tipo lygtys, kurias vadiname *homogeninėmis* pirmos eilės *lygtimis*.

23 pavyzdys. Išspręskime diferencialinę lygtį

$$y'=\frac{k+\frac{y}{x}}{1-k\frac{y}{x}},\qquad(26)$$

kurią sudarėme, ieškodami kreivės su pastoviu pjovimo kampu (žr. 13 skyrelio 9 pavyzdį).

Sprendimas. Jei $u=\frac{y}{x}$, tai $y=ux$; todėl pagal sandaugos išvestinės skaičiavimo taisyklę turime:

$$y'=(ux)'=u'x+u\cdot 1=u'x+u.$$

Į (26) lygtį vietoj y' ir $\frac{y}{x}$ įrašę atitinkamai $u'x+u$ ir u, gauname:

$$u'x+u=\frac{k+u}{1-ku},$$

$$u'x=\frac{k+u}{1-ku}-u,$$

$$u'x=\frac{k(1+u^2)}{1-ku},$$

$$\frac{1-ku}{1+u^2}u'=\frac{k}{x}. \qquad (27)$$

Gavome lygtį su atskirtais kintamaisiais. Norint ją išspręsti, pirmiausia reikia rasti funkcijos $\frac{1-kx}{1+x^2}$ pirmykštę. Rašome:

$$\frac{1-kx}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{kx}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{k}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{k}{2}\cdot\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}.$$

Kadangi funkcijų $\frac{1}{1+x^2}$ ir $\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}$ pirmykštės yra $\operatorname{arctg} x$ (žr. 12 skyrelį) ir $\ln(1+x^2)$, tai funkcijos $\frac{1-kx}{1+x^2}$ pirmykštė bus $\operatorname{arctg} x-$ $-\frac{k}{2}\ln(1+x^2)$. Tačiau tuomet funkcijos $\frac{1-ku}{1+u^2}\cdot u'$ pirmykštė bus $\operatorname{arctg} u-\frac{k}{2}\ln(1+u^2)$.

Dabar vietoj (27) lygties galime parašyti lygtį

$$\left(\operatorname{arctg} u-\frac{k}{2}\ln(1+u^2)\right)'=(k\ln|x|)',$$

iš kurios gauname lygybę

$$\operatorname{arctg} u-\frac{k}{2}\ln(1+u^2)=k\ln|x|-k\ln|C|,$$

arba

$$\operatorname{arctg} u=\frac{k}{2}\ln\frac{x^2(1+u^2)}{C^2}.$$

Vietoj u įrašę $\frac{y}{x}$, gausime

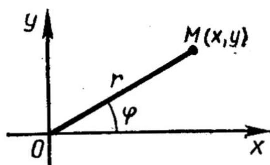
$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{k}{2}\ln\frac{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}{C^2},$$

arba

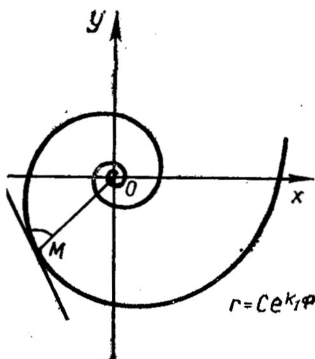
$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{k}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{C^2},$$

t. y.

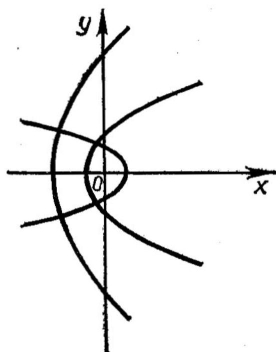
$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=k\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{C}.$$



16 pav.



17 pav.



18 pav.

Sakykime, $M(x, y)$ — koordinačių plokštumos taškas. Tuomet $\sqrt{x^2+y^2}$ yra atstumas r nuo taško O iki M, o $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\varphi$ — kampas, kurį spindulys OM sudaro su abscisių ašimi (16 pav.). Vartodami žymėjimus r ir φ, ką tik gautą (27) lygties bendrąjį sprendinį galėsime parašyti šitaip: $\varphi=k\ln\frac{r}{C}$. Iš čia, kai $k_1=\frac{1}{k}$, gauname

$$r=Ce^{k_1\varphi}. \qquad (28)$$

Vadinasi, ieškomos kreivės dydžiai r ir φ yra susieti (28) lygtimi. Ta kreivė vadinama *logaritmine spirale* (17 pav.).

Panašiai (tik dar sudėtingiau skaičiuojant) sprendžiama lygtis

$$\frac{y}{x}=\frac{2y'}{1-(y')^2},$$

kurią sudarėme, nagrinėdami 12 skyrelio 8 pavyzdį: ieškojome kreivės, nuo kurios atsispindėję lygiagrečių spindulių pluoštas susirenka viename taške (9 pav.). Tos lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C^2+2Cx.$$

Tai parabolės, kurių simetrijos ašis yra ašis Ox (18 pav.). Atsispindėjęs nuo tokios parabolės lygiagrečių spindulių pluoštas susirenka viename taške. Teisingas ir atvirkščias teiginys: jei nurodytame taške yra šviesos šaltinis, tai spinduliai, atsispindėję nuo parabolės, sudaro lygiagrečių spindulių pluoštą. Tas faktas turi didelę praktinę reikšmę. Pavyzdžiui, prožektoriaus atspindimasis paviršius yra paraboloidas — paviršius, kuris gaunamas, parabolę sukant apie jos simetrijos ašį.

Pratimai

18. Raskite pateiktų lygčių bendruosius sprendinius:

a) $y'=\sin x+\cos x$; b) $y'=\frac{x^4-1}{x^3}$; c) $(y')^2-5y'+6=0$.

19. Raskite pateiktų lygčių bendruosius sprendinius:

a) $y'=2y$; b) $y'=-\frac{1}{3}y$; c) $y'=y^2$; d) $y'=\operatorname{tg} y$.

Raskite pateiktų lygčių bendruosius sprendinius:

20. a) $yy'=x+1$; b) $y'\sqrt{y}=\sin x$; c) $y'=xy$.

21. a) $y'=\frac{3x}{y}$; b) $y'=e^{2x-4y}$; c) $2xyy'=y^2-1$.

22. Raskite pateiktų lygčių atskiruosius sprendinius, atitinkančius nurodytas pradines sąlygas:

a) $y'=2\sqrt{y}$, $y(0)=1$;

b) $y'+y\sin 2x=0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$;

c) $(1+x^3)y'=3x^2y$, $y(0)=2$;

d) $y'=\frac{2y}{x}$, $y(1)=1$.

23. Raskite pateiktų tiesinių diferencialinių lygčių bendruosius sprendinius:

a) $y'+\frac{y}{x}=1$; b) $y'-3y=2e^x$.

24. Raskite pateiktų tiesinių diferencialinių lygčių atskiruosius sprendinius, atitinkančius nurodytas pradines sąlygas:

a) $2y'-y=e^x$, $y(0)=5$;

b) $x^2y'+5xy+4=0$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=62$.

25. Raskite homogeninės diferencialinės lygties $y'=\frac{x+y}{x-y}$ bendrąjį sprendinį.

26. Masės m materialusis taškas juda tiese, veikiamas jėgos, kintančios pagal dėsnį $f(t)=A\cos\omega t$. Raskite to taško judėjimo dėsnį, jei momentu $t=0$ jo pradinis greitis ir koordinatė buvo lygūs nuliui.

27. Per bet kurį kreivės tašką nubrėžus liestinę, jos krypties koeficientas lygus lietimosi taško ordinatės kvadratui (žr. 15 pratimą). Be to, kreivė eina per tašką $P(-1, 1)$. Raskite tą kreivę.

28. Kreivės liestinės atkarpa nuo lietimosi taško iki abscisių ašies kerta ordinačių ašį. Susikirtimo taškas šią atkarpą dalija

pusiau (žr. 16 pratimą). Kreivė eina per tašką $P(1, 2)$. Raskite tą kreivę.

29. Kreivės liestinės atkarpa nuo lietimosi taško iki abscisių ašies turi ilgį, lygų atstumui nuo koordinačių pradžios iki lietimosi taško (žr. 17 pratimą). Raskite tą kreivę.

Atsakymai

1. 30 $\log_2$ 100 dienų. **2.** $\frac{m_0}{\sqrt[10]{2}}$, $\frac{m_0}{\sqrt{2}}$, $\frac{m_0}{4}$. **3.** $y=y_0e^{kt}$, $k>0$. **4.** $y(t)=2^{\frac{t-5}{2}}$ kg; $y_0=\frac{1}{4\sqrt{2}}$ kg. **5.** Per 60 minučių. **6.** $S(t)=25\cdot 2^{\frac{t}{5}}$ m. **8.** $A=2$. **9.** $\omega=100\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^t$ aps/min. **11.** $1\frac{3}{32}$. **12.** 0,32 m/s. **13.** $\frac{1}{1024}$. **14.** $v=\left(\frac{m}{k}g+v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k}$. **15.** $y'=y^2$. **16.** $2xy'=y$. **17.** $y'=-\frac{y}{x}$. **18.** a) $y=-\cos x+\sin x+C$; b) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}+C$; c) $y=2x+C$, $y=3x+C$. **19.** a) $y=Ce^{2x}$; b) $y=Ce^{-\frac{1}{3}x}$; c) $y=-\frac{1}{x+C}$; d) $\sin y=Ce^x$. **20.** a) $y=\pm\sqrt{x^2+2x+C}$; b) $y=\left(\frac{3}{2}(C-\cos x)\right)^{\frac{2}{3}}$; c) $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$. **21.** a) $y=\pm\sqrt{3x^2+C}$; b) $y=\frac{1}{4}\ln(2e^{2x}+C)$; c) $y=\pm\sqrt{Cx+1}$. **22.** a) $y=(x+1)^2$; b) $y=e^{\frac{1}{2}\cos 2x}$; c) $y=2(1+x^3)$; d) $y=x^2$. **23.** a) $y=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}$; b) $y=Ce^{3x}-e^x$. **24.** a) $y=e^x+4e^{\frac{x}{2}}$; b) $y=\frac{2-x^4}{x^5}$. **25.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. **26.** $x=\frac{A}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$. **27.** $y=-\frac{1}{x}$. **28.** $y^2=4x$. **29.** $y=\frac{C}{x}$.

KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI IR DAUGIANARIAI

§ 1. KAM REIKALINGI KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI

Daug kas esate girdėję, kad matematikoje, be visiems pažįstamų realiųjų skaičių, esama ir kažkokių paslaptingų kompleksinių skaičių — menamų, tariamų skaičių. Manoma, kad tie skaičiai esą tokie nepaprasti, keisti ir sudėtingi, jog apie juos vadovėliuose net neužsimenama, o tik iš užuominų galima juos nujausti.

Pavyzdžiui, kartais sakome, kad kvadratinė lygtis su neigiamu diskriminantu neturi realių šaknų, nors galėtume pasakyti trumpiau: neturi šaknų. Dažnai galima išgirsti sakant: algebrinės lygties šaknų skaičius lygus jos laipsniui. Mokyklinės matematikos požiūriu šis teiginys, be abejo, klaidingas, nes nepritaikomas net kvadratinėms lygtims; jis pasidaro teisingas, tik įvedus kompleksinius skaičius (ir patikslinus sąvoką „šaknų skaičius“).

Iš tikrųjų, kompleksinių skaičių teorijoje nieko nėra menamo ar nesuvokiamo, nes kompleksinio skaičiaus sąvoka iš dalies net paprastesnė už realiojo skaičiaus sąvoką. Vėliau įsitikinsime, kad tiksliam kompleksinių skaičių ir jų veiksmų apibrėžimui pakanka daug žemesnio matematinių žinių ir matematinės kultūros lygio negu tuo pačiu tikslumu kuriant realiojo skaičiaus sąvoką. Pabrėžiame, kad griežta realiųjų skaičių teorija mokykloje iš viso nedėstoma, nes ji iš tikrųjų sunki.

Didžiausią mokinių, iš nuogirdų žinančių, kad esama kompleksinių skaičių, nuostabą kelia lygybė $i^2=-1$. Juk visiems „gerai žinoma“, kad skaičiaus kvadratas negali būti neigiamas! Šis teiginys vis dėlto niekuo nepagrįstas: *realiojo skaičiaus* kvadratas, žinoma, negali būti neigiamas. Bet kodėl šią realiųjų skaičių savybę privalo turėti kompleksiniai skaičiai? Juk mūsų nestebina faktas, kad racionaliojo skaičiaus kvadratas negali būti lygus 2, nors yra realus skaičius, turintis šią savybę, būtent, iracionalus skaičius $\sqrt{2}$.

Vadinasi, negalima atsisakyti kompleksinių skaičių vien dėl to, kad „tokių skaičių negali būti“, arba dėl tos pačios priežasties

laikyti juos pernelyg sudėtingais ir keistais. Tačiau tuomet iš karto kyla klausimas: ar verta domėtis skaičiais, kurių savybės visiškai nepanašios į „normalių“ realių skaičių savybes?

Vargu ar kas abejoja, kad nė viena matematikos teorija nekuriama ir netobulinama, kai jos nereikia praktikai arba pačiai matematikai. O kompleksiniai skaičiai labai plačiai taikomi elektrotechnikoje, hidrodinamikoje, aerodinamikoje, fizikoje, geometrijoje ir daugelyje kitų mokslo ir technikos sričių.

Deja, šiame kurse negalėsime jūsų nuodugniai supažindinti su tais pritaikymais, nes čia bus aiškinama tik kompleksinių skaičių abėcėlė. Vis dėlto šio kurso apimtis leis parodyti, kaip kompleksiniai skaičiai taikomi mokyklinėje ir nemokyklinėje matematikoje, o tai jau savaime bus tam tikras „pateisinimas“, kodėl jais domimės.

Kompleksinių skaičių teorijos mokomasi labiausiai dėl to, kad jie padeda išspręsti uždavinius, kurie sunkiai sprendžiami kitomis priemonėmis, t. y. vartojant tik realiuosius skaičius. Kitaip sakant, turėdamas savo priemonių arsenale kompleksinius skaičius, matematikas gali išspręsti daug daugiau uždavinių.

Pateiksime keletą uždavinių, kuriuos sprendžiant efektyviai taikomi kompleksiniai skaičiai. Pradėsime nuo grynai mokyklinio turinio uždavinių. Juos galima išspręsti, aišku, ir be kompleksinių skaičių aparato, bet sprendžiant juos elementariai, reikia sudėtingesnio samprotavimo ir skaičiavimo negu „standartiškai“ taikant kompleksinius skaičius.

1. Išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin \alpha, \\ \cos x+\cos y=\cos \alpha. \end{cases}$$

2. Ištirti, kokios turi būti sveikosios n reikšmės, kad reiškinio $n^{44}+n+1$ reikšmė būtų pirminis skaičius.

3. Įrodyti, kad reiškinio $(p+1)^{2q+1}+p^{q+2}$ reikšmė, kai p ir q — natūriniai skaičiai, dalijasi iš p^2+p+1 reikšmės.

4. Ar galima daugianarį x^4+x^2+1 išreikšti dviejų daugianarių kvadratų suma?

5. Išskaidyti dauginamaisiais šiuos daugianarius:

$$x^5+x+1, \quad x^{10}+x^5+1, \quad x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1.$$

6. Apskritimo spindulys lygus $65\sqrt{5}$, o centras sutampa su koordinačių pradžia. Ar tame apskritime yra taškų, kurių koordinatės — sveikieji skaičiai?

7. Įrodyti, kad įbrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių ilgių sandaugų suma lygi įstrižainių ilgių sandaugai.

(Šis teiginys vadinamas *Ptolemėjo teorema.*)

8. Kokią aibę sudaro plokštumos taškai, kurių atstumų nuo duotojo taisyklingo daugiakampio viršūnių kvadratų suma lygi d?

9. Poslinkiu f taškas A atvaizduojamas į tašką B, o taškas B — į tašką A. Raskite bet kurio plokštumos taško vaizdą, gautą poslinkiu f.

10. Taškai A, B ir C yra taisyklingojo trikampio viršūnės. Kiekvienas plokštumos taškas iš pradžių atvaizduojamas centrine simetrija Z_A, gautieji vaizdai atvaizduojami centrine simetrija Z_B, nauji vaizdai atvaizduojami centrine simetrija Z_C, paskui — centrine simetrija Z_A ir t. t. Kurie taškai M po keleto atvaizdavimų „grįš į savo vietas"?

11. Išskaidyti tiesiniais ir kvadratiniais dauginamaisiais daugianarį x^n-1.

Nurodysime dabar kelis turiningus uždavinius, kurie iš tikro svarbūs ne tik pačiai matematikai, bet ir jos taikymams.

A. Mokyklinėje matematikoje nagrinėjami trys plokštumos poslinkių tipai: lygiagretusis postūmis, posūkis ir ašinė simetrija (centrinė simetrija, kaip žinoma, yra tik atskiras posūkio atvejis).

Kyla natūralus klausimas: *ar yra poslinkių, nepriskiriamų šiems tipams?* Konkretesnis klausimas — *kokius poslinkius galima išreikšti trijų nurodytųjų tipų poslinkių kompozicijomis?*

Mokėti atsakyti į tuos klausimus labai svarbu, mokantis geometrijos, be to, tai gali būti naudinga, sprendžiant konkrečius uždavinius.

B. Spręsdami daugelį matematikos uždavinių, susiduriame su sekomis, kurios apibrėžiamos, kaip sakoma, *rekurentiškai.* Tai reiškia, kad nurodytos k pirmųjų sekos narių reikšmės (*pradinės sąlygos*) ir pateikta formulė, kuri kiekvieną narį, pradedant $(k+1)$-ju, išreiškia k pirmesnių narių reikšmėmis (*rekurentinė formulė*).

Atskiri tokių sekų atvejai — aritmetinė ir geometrinė progresijos — nagrinėjami mokykliniame matematikos kurse. Galima pateikti dar vieną pavyzdį: Fibonačio skaičių seka apibrėžiama pradinėmis sąlygomis $u_1=1$, $u_2=1$ ir rekurentine formule

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

Vienas iš pagrindinių uždavinių, kuriuos reikia spręsti, tiriant rekurentines sekas,— sudaryti sekos bendrojo nario formulę. Matematikoje jau sukurtas bendras šio uždavinio sprendimo metodas, kai rekurentinė seka yra tiesinė. Tokia seka nusakoma rekurentine formule

$$u_{n+k}=p_1u_{n+k-1}+p_2u_{n+k-2}+\ldots+p_ku_n,$$

kurios koeficientai $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — bet kokie skaičiai. Paaiškinsime tą metodą, taikydami jį antros eilės sekoms ($k=2$). Bendrasis metodas visai analogiškas.

Sakykime, seka (u_n) nusakoma rekurentine formule

$$u_{n+2}=pu_{n+1}+qu_n \tag{1}$$

ir tam tikromis pradinėmis sąlygomis. Jos bendrąjį narį u_n išreikškime laipsniu $u_n=\lambda^n$, kurio pagrindas λ — atitinkamas skaičius. Kadangi

$$u_{n+2}=\lambda^{n+2},\ u_{n+1}=\lambda^{n+1},\ u_n=\lambda^n,$$

tai, į (1) lygybę įrašę atitinkamas reikšmes ir suprastinę iš λ^n, gauname lygybę

$$\lambda^2=p\lambda+q.$$

Iš jos aišku, kad λ yra kvadratinės lygties

$$x^2-px-q=0 \tag{2}$$

šaknis.

Gautoji lygtis vadinama (1) rekurentinės formulės *charakteristine lygtimi*. Vadinasi, kai charakteristinė lygtis turi bent vieną šaknį α, galima nurodyti seką (α^n), tenkinančią (1) lygybę. Uždavinys, žinoma, dar neišspręstas net šiuo atveju, nes seka (α^n) gali neatitikti pradinių sąlygų. Visiškai tą uždavinį išspręsime 4 paragrafe.

Tačiau ką daryti, kai charakteristinė lygtis neturi šaknų? Tai atsitinka, pavyzdžiui, su visiškai paprasta rekurentine formule

$$u_{n+2}=-u_n. \tag{3}$$

Jos charakteristinė lygtis $x^2+1=0$ neturi šaknų, todėl ką tik paaiškintas metodas tai formulei nepritaikomas.

Toliau įsitikinsime, kad kaip tik kompleksiniai skaičiai padeda rasti išeitį iš tos padėties. Kompleksinių skaičių aibėje kiekviena kvadratinė lygtis ir apskritai bet kurio laipsnio algebrinė lygtis turi šaknų, ir tai įgalina išspręsti nagrinėjamą uždavinį bendruoju atveju, be to, ką tik išdėstytu metodu.

C. Diferencialinių lygčių teorijoje — vienoje svarbiausių taikomųjų matematikos šakų — didelę reikšmę turi vadinamosios

tiesinės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais. Tai lygtys

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \quad (4)$$

kurių y — nežinoma funkcija, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ — jos išvestinės, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — skaičiai, o $f(x)$ — žinoma funkcija.

Atskiri šių lygčių atvejai nagrinėjami ir mokykliniame matematikos kurse: tai harmoninio svyravimo lygtis $y''=-\omega^2y$ ir rodiklinio augimo lygtis $y'=ky$. Šio tipo lygčių pasitaiko ir fizikoje: pavyzdžiui, srovės stiprio lygtis arba virpesių kontūro krūvio lygtis.

Dabar kalbėsime tik apie (4) tipo homogenines lygtis, kurių $f(x)=0$. Tokių lygčių sprendimo metodas, nors iš pirmo žvilgsnio ir keista, visiškai panašus į skyrelyje B išdėstytą metodą, kuriuo ieškojome rekurentinės sekos bendrojo nario.

Ieškomąją funkciją išreikškime formule $y=e^{\lambda x}$, $\lambda\in\mathbf{R}$. Kadangi

$$y'=\lambda e^{\lambda x},\ y''=\lambda^2e^{\lambda x},\ \ldots,\ y^{(n)}=\lambda^ne^{\lambda x},$$

tai, šias išraiškas įrašę į (4) lygtį ir suprastinę iš $e^{\lambda x}$, gauname lygybę

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-2}\lambda^2+a_{n-1}\lambda+a_n=0,$$

iš kurios aišku, kad λ yra lygties

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (5)$$

šaknis.

Kaip kalbant apie rekurentines sekas, taip ir šiuo atveju (5) lygtis vadinama (4) diferencialinės lygties *charakteristine lygtimi*. Vadinasi, jei charakteristinė lygtis turi bent vieną šaknį α, tai galima nurodyti (4) diferencialinės lygties sprendinį $y=e^{\alpha x}$. Jei ta lygtis neturi šaknų, tai aptartas metodas nepritaikomas. Aišku, tai nereiškia, kad atitinkama diferencialinė lygtis neturi sprendinių: vėliau juos rasime, naudodamiesi kompleksiniais skaičiais.

Atkreipsime dėmesį, kad kaip tik taip atsitinka su „mokyklinėmis" lygtimis

$$y''=-\omega^2y \text{ ir } Q''=-\frac{1}{LC}Q.$$

Pirmos diferencialinės lygties charakteristinė lygtis $x^2+\omega^2=0$ neturi šaknų, bet tai, žinoma, nekliudo pačiai diferencialinei lygčiai turėti sprendinių: sprendiniai yra funkcijos

$$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x, \quad (6)$$

kurių C_1 ir C_2 — bet kurie realieji skaičiai.

Šiuo atskiru atveju matome, kad lygtis neturi „rodiklinių“, bet turi „trigonometrinių“ sprendinių. Vienas iš labiausiai stebinančių kompleksinių skaičių teorijos (tiksliau — kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos) faktų pasireiškia tuo, kad trigonometrinės funkcijos — sinusas ir kosinusas,— vaizdžiai kalbant, yra rodiklinės funkcijos.

Būtina taip pat pabrėžti, kad ir (6) formulę išvesime, kaip tik stengdamiesi rasti lygties $y''=-\omega^2 y$ sprendinį, išreikštą rodikline funkcija.

Skyreliuose A, B ir C suformulavome uždavinius, kurių sprendimas pagrįstas kompleksinių skaičių aparato taikymu. Tų uždavinių sąlygos neturi nieko bendro su kompleksiniais skaičiais, bet tie skaičiai atsiranda sprendimo procese. Sprendimo pabaigoje kompleksiniai skaičiai „dingsta“, ir gautas rezultatas formuluojamas tik realiųjų skaičių terminais.

Pabrėžiame, kad, sprendžiant uždavinius B ir C, iškyla dar viena problema: *kaip išspręsti bet kurio laipsnio algebrinę lygtį?* Tiriant šią problemą, savo ruožtu prireikia nagrinėti daugianarius, t. y. reiškinius

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Antra vertus, daugianarių teorija tampa darni kaip tik tuomet, kai jiems taikoma kompleksinių skaičių teorija: kaip sakėme, kompleksinių skaičių aibėje kiekvienas daugianaris turi bent vieną šaknį.

§ 2. DAUGIANARIAI

1. Pagrindiniai apibrėžimai. Vieno kintamojo daugianaris — pagrindinė daugianarių teorijos sąvoka — nagrinėjamas mokykliniame kurse. Daugianariu vadinamas reiškinys

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \quad (1)$$

kurio koeficientai $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — realieji skaičiai. Tą reiškinį gali sudaryti ir vienas dėmuo — toks daugianaris, aišku, vadinamas vienanariu. Daugianario sąvoką šiek tiek patikslinsime, apibrėždami nulinio laipsnio daugianario ir nulinio daugianario sąvokas.

Daugianario laipsnis. Sakykime, $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+$ $+\ldots+a_n$ — bet koks daugianaris. Šitaip rašydami, nereikalaujame, kad koeficientas a_0 būtų nelygus nuliui, bet jei vis dėlto jis ne-

lygus nuliui, tai skaičius n vadinamas daugianario $f(x)$ *laipsniu.* Daugianario $f(x)$ laipsnis žymimas $\deg f(x)$.

Pavyzdžiui, $\deg(-2x^2-3x)=2$, $\deg(0x^5+0x^4-x^3)=3$.

Aptarsime specialiai du atvejus, kai daugianaryje $f(x)$ faktiškai nėra raidės x. Tai gali atsitikti, kai visi daugianario $f(x)$ koeficientai lygūs 0. Tokį daugianarį vadinsime *nuliniu* ir žymėsime simboliu 0. Jei

$$f(x)=a_0\neq 0,$$

tai sakysime, kad daugianario $f(x)$ laipsnis lygus 0.

Vadinasi, be paprastų daugianarių, kuriuose iš tikrųjų yra x, nagrinėjami nulinio laipsnio daugianariai (tai tiesiog nelygūs nuliui skaičiai) ir nulinis daugianaris (tai daugianaris, lygus 0 ir neturįs laipsnio).

Primename, kad koeficientas a_0, kai $a_0\neq 0$, vadinamas daugianario $f(x)$ *vyriausiuoju koeficientu*, o vienanaris a_0x^n — daugianario $f(x)$ *vyriausiuoju nariu.* Koeficientas a_n vadinamas *laisvuoju nariu.*

Jei daugianarių $f(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ir $g(x)=b_0x^k+ +\ldots+b_{k-1}x+b_k$ laipsniai atitinkamai lygūs n ir k (t. y. $a_0\neq 0$ ir $b_0\neq 0$), tai, sudauginę tuos daugianarius, gausime daugianarį, kurio vyriausiasis narys yra $a_0b_0x^{n+k}$. Iš to išplaukia svarbus teiginys:

dviejų nenulinių daugianarių sandaugos laipsnis lygus dauginamųjų daugianarių laipsnių sumai.

Savaime aišku, kad šis teiginys yra teisingas ir tuo atveju, kai sandaugą sudaro bet koks baigtinis daugianarių skaičius. Beje, iš jo išplaukia, kad nenulinių daugianarių sandauga negali būti nulinis daugianaris, kitaip sakant,

$$f(x)g(x)=0 \Rightarrow f(x)=0 \text{ arba } g(x)=0\,^*. \qquad (2)$$

Dėl dviejų daugianarių sumos laipsnio bendruoju atveju galima padaryti tik tokią išvadą:

daugianarių sumos laipsnis ne didesnis už didžiausią sudedamų daugianarių laipsnį.

Iš tikrųjų, sudėjus skirtingo laipsnio daugianarius ir sutraukus panašiuosius narius, išlieka vieno daugianario vyriausiasis narys; sudedant vienodo laipsnio daugianarius, jų vyriausieji nariai gali pasinaikinti, o tokiu atveju sumos laipsnis, aišku, bus mažesnis už sudedamų daugianarių laipsnį.

---

* Lygybė $f(x)=0$ reiškia, kad $f(x)$ — nulinis daugianaris.

Daugianario reikšmės, daugianario šaknys. Savaime aišku, kad į daugianarį $f(x)$, t. y. į (1) reiškinį, vietoj x galima įrašyti bet kurį realųjį skaičių c. Atlikę veiksmus, gausime realų skaičių, kuris vadinamas daugianario $f(x)$ reikšme, kai $x=c$ (arba taške c), ir žymimas $f(c)$:

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_{n-1}c+a_n.$$

Atkreipsime dėmesį į dvi paprastas lygybes, susijusias su daugianario reikšmėmis ir naudingas uždavinių sprendimui:

$$f(0)=a_n,\quad f(1)=a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n,$$

t. y. daugianario laisvasis narys yra jo reikšmė taške 0, o daugianario koeficientų suma — jo reikšmė taške 1.

Pavyzdžiui, atskliautę reiškinio

$$f(x)=(2x^2-3x+1)^{1980}+(2x^3+3x-4)^{1981}$$

skliaustus ir sutraukę panašiuosius narius, gausime daugianarį, kurio laisvasis narys yra $f(0)=1-4^{1981}$, o koeficientų suma lygi $f(1)=1$.

Apibrėžimas. *Jei $f(c)=0$, tai skaičius c vadinamas daugianario $f(x)$ šaknimi.*

Šaknies sąvoka yra pagrindinė daugianarių teorijos sąvoka. Daugianarių teorija ir buvo sukurta sprendžiant įvairius klausimus, susijusius su bet kurio laipsnio algebrinių lygčių sprendimu, t. y. su daugianario šaknų ieškojimu. Be to, būtent mėgindami sudaryti bendrą formulę kubinėms lygtims spręsti, matematikai atrado kompleksinius skaičius.

Pratimai

1. Atlikite veiksmus:

$$(x^3+x-1)(x^2+x+1)-(x-1)(x^4+x^2+1).$$

2. Raskite daugianarių laisvuosius narius ir koeficientų sumas:

a) $(x^2+x-1)^{1980}$; b) $(3x^2-4x+2)^{100}$; c) $(x+1)^n$.

3. Įrodykite tapatybes:

a) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)$;

b) $x^{2n+1}+1=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-\ldots-x+1)$.

4. Viena lygties $x^3-6x^2+ax-6=0$ šaknis lygi 3. Raskite a ir išspręskite tą lygtį.

5. Raskite tokius sveikuosius skaičius a ir b, kad viena lygties $3x^3+ax^2+bx+12=0$ šaknis būtų lygi $1+\sqrt{3}$.

6. Daugianario $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ šaknys yra skaičiai x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Raskite šių daugianarių šaknis:

a) $a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + (-1)^n a_n$;
b) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ $(a_n \neq 0)$;
c) $a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0$ $(a_n \neq 0)$;
d) $2^n a_0 x^n + 2^{n-1} a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$;
e) $a_nx^n - 2a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n 2^n a_0$ $(a_n \neq 0)$.

Daugianarių lygybė. Kokiu atveju du daugianarius laikome lygiais? Atsižvelgiant į pateiktą daugianario apibrėžimą, šį klausimą galima pakeisti klausimu: kokiu atveju (1) tipo reiškiniai yra lygūs? Kalbant apie bet kokius reiškinius, jiems taikoma tapačios lygybės sąvoka, kuria ir remsimės, apibrėždami daugianarių lygybės sąvoką.

Daugianarius $f(x)$ ir $g(x)$ laikysime *lygiais,* kai bet kurį $c \in \mathbf{R}$ atitinka lygios tų daugianarių reikšmės:

$$f(c) = g(c).$$

Nurodant, kad daugianariai $f(x)$ ir $g(x)$ lygūs, rašoma $f(x) = g(x)$. Iš apibrėžimo išplaukia, kad daugianariai $f(x)$ ir $g(x)$ yra *skirtingi,* kai bent vieną $c \in \mathbf{R}$ atitinka skirtingos jų reikšmės: egzistuoja toks $c \in \mathbf{R}$, kad $f(c) \neq g(c)$.

Įrodant, kad du daugianariai yra lygūs, dažniausiai remiamasi tapačiais pertvarkymais. Pavyzdžiui,

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$
$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

Norint įsitikinti, kad atitinkami reiškiniai lygūs, abiem atvejais pakanka atlikti daugybą ir sutraukti panašiuosius narius arba, kaip kartais sakoma, daugianariams suteikti (1) standartinį pavidalą.

Jei du daugianarius užrašę standartiniu pavidalu, gauname du reiškinius su vienodais koeficientais prie vienodų x laipsnių, tai tie daugianariai, be abejo, lygūs. Tačiau ar galima tvirtinti atvirkščiai: jei du daugianariai, išreikšti (1) pavidalu, yra lygūs, tai jų vienodų x laipsnių koeficientai turi būti lygūs?

Pasirodo, tas teiginys irgi teisingas: jį įrodysime, remdamiesi sveikos algebrinės funkcijos, t. y. funkcijos

$$x \to a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

tolydumu (žr. „Algebra ir analizės pradmenys IX—XI klasei“, § 3, 13 skyrelis, 1 teorema).

Tarkime, kad bet kurį $x \in \mathbf{R}$ atitinka lygios daugianarių $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ir $g(x) = b_0x^n + \ldots + b_{n-1}x + b_n$ reikšmės

(čia nereikalaujame, kad koeficientai a_0 ir b_0 būtų nelygūs 0). Tuomet jų skirtumo

$$h(x) = (a_0 - b_0)x^n + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + (a_n - b_n) =$$
$$= c_0x^n + \ldots + c_{n-1}x + c_n$$

reikšmė, atitinkanti bet kurį $x \in \mathbf{R}$, lygi 0. Vadinasi,

$$c_n = h(0) = 0.$$

Toliau nagrinėjame funkciją $h_1(x)$, apibrėžiamą formule

$$h_1(x) = c_0x^{n-1} + \ldots + c_{n-2}x + c_{n-1}.$$

Kai $x \neq 0$, bus teisinga lygybė $h_1(x) = h(x)/x$, todėl bet kuriame taške $x \neq 0$ funkcijos $h_1(x)$ reikšmė lygi 0. Dėl šios priežasties funkcijos $h_1(x)$ riba, kai $x \to 0$, lygi nuliui. Kadangi $h_1(x)$ yra tolydi funkcija, tai

$$c_{n-1} = h_1(0) = \lim_{x \to 0} h_1(x) = 0.$$

Šitaip samprotaudami įsitikinsime, kad $c_{n-2} = 0$, $c_{n-3} = 0$, ..., $c_0 = 0$. Vadinasi, sužinojome, kad

$$a_0 - b_0 = 0, \ a_1 - b_1 = 0, \ \ldots, \ a_n - b_n = 0,$$

todėl teiginys jau įrodytas.

Šitas teiginys labai svarbus tiek daugianarių su realiais koeficientais teorijai, tiek ir daugianarių su kompleksiniais koeficientais teorijai. Būtina pabrėžti, kad bendrojoje algebrinėje daugianarių teorijoje, kai koeficientai gali būti ne tik skaičiai, atitinkamas teiginys kai kada klaidingas. Su tokiais daugianariais susiduriame ne tik „grynojoje", bet ir taikomojoje matematikoje, pavyzdžiui, algebrinėje kodavimo teorijoje. Deja, šiame kurse negalime pateikti atitinkamų pavyzdžių.

Parodysime, kaip taikomas įrodytasis teiginys. Išspręsime uždavinį:

Įrodyti, kad daugianaris $f(x)$ neturi nelyginio laipsnio vienanarių, kai jis yra lyginė funkcija.

Jei

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

tai

$$f(-x) = (-1)^n a_0x^n + (-1)^{n-1}a_1x^{n-1} + \ldots - a_{n-1}x + a_n.$$

Kadangi pagal sąlygą $f(x) = f(-x)$, tai daugianarių $f(x)$ ir $f(-x)$ koeficientai prie vienodų x laipsnių yra lygūs:

$$a_0 = (-1)^n a_0, \ a_1 = (-1)^{n-1}a_1, \ \ldots, \ a_k = (-1)^k a_k, \ldots$$
$$\ldots, a_{n-1} = -a_{n-1}.$$

Vadinasi, jei k — nelyginis skaičius, tai $a_k = 0$, o tai ir reikėjo įrodyti.

Pratimai

7. Įrodykite, kad, atlikus reiškinyje $(x^2-x+1)^{1980}+(x^2+x+1)^{1980}$ nurodytus veiksmus ir sutraukus panašiuosius narius, neliks nelyginių x laipsnių.

8. Jei daugianaris $p(x)$ yra nelyginė funkcija, tai jame nėra lyginio laipsnio vienanarių. Įrodykite.

9. a) Raskite daugianario $(x^2-x+1)^{100}$ lyginių x laipsnių koeficientų sumą;

b) Raskite daugianario $(x^2-x+1)^{100}$ nelyginių x laipsnių koeficientų sumą.

2. **Daugianarių dalyba.** Daugianarių teorija tam tikra prasme panaši į sveikųjų skaičių teoriją, nors iš pažiūros tos teorijos neturi nieko bendro. Vidinis tų teorijų panašumas paaiškinamas tuo, kad daugianarių aibėje, kaip ir sveikųjų skaičių aibėje, galima apibrėžti dalybą ir — tai dar svarbiau — dalybą su liekana.

Daugianarių dalumas.

Apibrėžimas. *Daugianaris $f(x)$ dalijasi iš daugianario $g(x)\neq 0$, kai egzistuoja toks daugianaris $q(x)$, kuriam teisinga lygybė*

$$f(x)=g(x)q(x). \quad (3)$$

Pavyzdžiui, iš lygybės

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

išplaukia, kad x^3+1 dalijasi iš daugianario $x+1$ ir iš daugianario x^2-x+1.

Atkreipsime dėmesį, kad daugianaris $q(x)$, parašytas (3) lygybėje, yra vienintelis: jei egzistuotų daugianaris $q_1(x)$, tenkinantis (3) lygybę, tai turėtume lygybę

$$f(x)=g(x)q(x)=g(x)q_1(x),$$

iš kurios gautume

$$g(x)(q(x)-q_1(x))=0.$$

Kadangi $g(x)$ nėra nulinis daugianaris (pasakyta sąlygoje), tai, remdamiesi (2) teiginiu, nusprendžiame, kad $q(x)-q_1(x)$ yra nulinis daugianaris, t. y. daugianaris $q_1(x)$ sutampa su daugianariu $q(x)$.

Daugianaris $q(x)$, parašytas (3) lygybėje, vadinamas daugianario $f(x)$ dalybos iš $g(x)$ *dalmeniu.*

Daugianarių dalumas pasižymi tomis pačiomis savybėmis, kaip ir sveikųjų skaičių dalumas. Pavyzdžiui:

1) jei du daugianariai dalijasi iš $g(x)$, tai jų suma ir skirtumas irgi dalijasi iš $g(x)$;

2) jei $f(x)$ dalijasi iš $g(x)$, tai ir bet kuri sandauga $f(x)u(x)$ dalijasi iš $g(x)$;

3) jei $f(x)$ dalijasi iš $g(x)$, o $g(x)$ dalijasi iš $h(x)$, tai ir $f(x)$ dalijasi iš $h(x)$.

Kad šie teiginiai teisingi, įrodoma remiantis dalumo apibrėžimu. Įrodyti visiškai lengva, todėl įrodymų čia nepateikiame.

Daugianarių dalumo savybes galima taikyti, nagrinėjant dalumą sveikųjų skaičių aibėje. Pavyzdžiui, išsiaiškinsime, *kokius sveikuosius skaičius n atitinka pirminės reiškinio* n^3+n^2-5n-2 *reikšmės.*

Pirmiausia priminsime, kad natūrinis skaičius, nelygus 1, vadinamas pirminiu, kai jis dalijasi tik iš 1 ir pats iš savęs; neigiamas sveikasis skaičius k vadinamas pirminiu, kai skaičius $-k$ yra pirminis.

Atsakydami į iškeltą klausimą, pastebėsime, kad teisinga tokia lygybė:

$$x^3+x^2-5x-2=(x-2)(x^2+3x+1). \qquad (4)$$

Vadinasi, skaičius n^3+n^2-5n-2 dalijasi iš $n-2$ ir iš n^2+3n+1. Todėl jis gali būti pirminis tik tuo atveju, kai vienas iš tų daliklių lygus 1 arba -1, t. y. kai teisinga bent viena šių lygybių:

$$n-2=1, \quad n-2=-1, \quad n^2+3n+1=1, \quad n^2+3n+1=-1.$$

Dabar reikia tik patikrinti šias n reikšmes: 3, 1, 0, -3, -1 ir -2. Tas n reikšmes atitinka reiškinio n^3+n^2-5n-2 reikšmės 19, -5, -2, -5, 3 ir 4, todėl ieškomoji skaičių aibė yra

$$\{3, 1, 0, -3, -1\}.$$

Gali kilti natūralus klausimas: iš kur atsirado (4) lygybė? Kaip atspėjome, kad daugianaris x^3+x^2-5x-2 šitaip išskaidomas dauginamaisiais? Pasirodo, kad, norint šitaip išskaidyti daugianarį, nėra reikalo dirbtinai grupuoti, nes tai galima padaryti, remiantis toliau išdėstyta teorija.

Daugianarių dalyba su liekana.

Apibrėžimas. *Sakykime, $g(x)$ — bet kuris nenulinis daugianaris. Daugianaris $r(x)$, kuris arba turi laipsnį, mažesnį už $g(x)$ laipsnį, arba lygus nuliui, vadinamas daugianario $f(x)$ dalybos iš $g(x)$ liekana, kai skirtumas $f(x)-r(x)$ dalijasi iš $g(x)$.*

Dalybos liekana apibrėžiama vienareikšmiškai: jei skirtumai

$$f(x)-r(x) \text{ ir } f(x)-r_1(x)$$

dalijasi iš $g(x)$, tai jų skirtumas $s(x)=r_1(x)-r(x)$ irgi dalijasi iš $g(x)$. Jei daugianaris $s(x)$ nebūtų nulinis, tai jo laipsnis būtų

mažesnis už $g(x)$ laipsnį, o tokiu atveju $s(x)$ negali dalytis iš $g(x)$. Vadinasi, $s(x)=0$, todėl $r_1(x)=r(x)$.

Jei $r(x)$ yra daugianario $f(x)$ dalybos iš $g(x)$ liekana, tai pagal apibrėžimą yra toks daugianaris $q(x)$, kad

$$f(x)-r(x)=g(x)q(x),$$

arba

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x).$$

Daugianaris $q(x)$, parašytas šioje lygybėje, apibrėžiamas, kaip anksčiau įsitikinome, vienareikšmiškai ir vadinamas daugianario $f(x)$ dalybos iš $g(x)$ *dalmeniu.*

Atkreipsime dėmesį, kad $f(x)$ dalijasi iš $g(x)$ tada ir tik tada, kai daugianario $f(x)$ dalybos iš $g(x)$ liekana lygi 0.

Pagrindinis daugianarių teorijos faktas yra tas, kad kiekvieną daugianarį $f(x)$ galima padalyti su liekana iš bet kurio nenulinio daugianario $g(x)$, t. y. galima rasti tokius daugianarius $q(x)$ ir $r(x)$ — dalmenį ir liekaną, kad būtų teisinga lygybė

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

be to, $r(x)$ yra arba nulinis daugianaris, arba daugianaris, kurio laipsnis mažesnis už $g(x)$ laipsnį.

Iš tikrųjų, sakykime, $f(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$ $(a_0\neq 0)$ ir $g(x)=$ $=b_0x^k+\ldots+b_k$ $(b_0\neq 0)$ yra bet kokie daugianariai. Jei $n<k$, tai iš lygybės

$$f(x)=g(x)\cdot 0+f(x)$$

kaip tik išplaukia, kad dalybos dalmuo lygus 0, o liekana yra pats daugianaris $f(x)$.

Jei $n\geqslant k$, tai, daugianarį $g(x)$ padauginę iš vienanario $\frac{a_0}{b_0}x^{n-k}$, gauname daugianarį

$$\frac{a_0}{b_0}x^{n-k}g(x)=a_0x^n+\ldots,$$

kurio vyriausiasis narys sutampa su daugianario $f(x)$ vyriausiuoju nariu. Todėl arba skirtumo

$$f_1(x)=f(x)-\frac{a_0}{b_0}g(x)x^{n-k}$$

laipsnis mažesnis už $f(x)$ laipsnį, arba tas skirtumas lygus 0.

Vadinasi, sudarėme daugianarį $f_1(x)$, kuris turi dvi savybes: 1) arba jo laipsnis ne didesnis už $n-1$, arba jis yra nulinis daugianaris; 2) skirtumas $f(x)-f_1(x)$ dalijasi iš $g(x)$.

Panašiai, turėdami daugianarį $f_1(x)$, galime sudaryti daugianarį $f_2(x)$ su dviem analogiškomis savybėmis: 1) arba jo

laipsnis ne didesnis už $n-2$, arba jis yra nulinis daugianaris; 2) skirtumas $f_1(x)-f_2(x)$ dalijasi iš $g(x)$.

Tęsdami tuos samprotavimus, kada nors rasime daugianarį $f_s(x)$, kuris turės dvi savybes: 1) arba jo laipsnis ne didesnis už $k-1$, arba jis — nulinis daugianaris; 2) skirtumas $f_{s-1}(x)-$ $-f_s(x)$ dalijasi iš $g(x)$.

Kadangi daugianarių, dalių iš $g(x)$, suma irgi dali iš $g(x)$, tai iš ką tik suformuluotų teiginių išplaukia, kad $f(x)-f_s(x)$ dalijasi iš $g(x)$, t. y. $f(x)-f_s(x)=g(x)q(x)$, arba

$$f(x)=g(x)q(x)+f_s(x).$$

Kadangi arba daugianaris $f_s(x)$ yra nulinis, arba jo laipsnis mažesnis už $k=\deg g(x)$, tai paskutinė lygybė reiškia, kad $f_s(x)$ yra daugianario $f(x)$ dalybos iš $g(x)$ liekana, o daugianaris $q(x)$ — tos dalybos dalmuo.

Dalmens ir liekanos praktiškai ieškoma, taikant skaičiavimo būdą, vadinamą dalijimu kampu. Tas būdas visiškai atitinka ką tik atliktą samprotavimą. Paaiškinsime jį pavyzdžiu.

$f(x)$	$3x^5+2x^2-x+1$	x^3-3x^2+1	$g(x)$
$\frac{a_0}{b_0}x^{n-k}g(x)$	$3x^5-9x^4+3x^2$	$3x^2+9x+27$ $\Vert$ $\frac{a_0}{b_0}x^{n-k}$	$q(x)$
$f_1(x)$	$9x^4-x^2-x+1$		
	$9x^4-27x^3+9x$		
$f_2(x)$	$27x^3-x^2-10x+1$		
	$27x^3-81x^2+27$		
$f_3(x)$	$80x^2-10x-26$		

Bendruoju atveju šią taisyklę galima suformuluoti taip:

1) daugianario $f(x)$ vyriausiąjį narį padalyti iš $g(x)$ vyriausiojo nario ir rezultatą parašyti po kampo ilgąja kraštine;

2) daugianarį $g(x)$ padauginti iš 1) veiksmo rezultato ir sandaugą parašyti po daugianariu $f(x)$;

3) iš $f(x)$ atimti po juo parašytą daugianarį;

4) patikrinti, ar 3) veiksmo rezultato laipsnis mažesnis už daugianario $g(x)$ laipsnį; jeigu taip (arba rezultatas nulinis), tai jis yra liekana, o po ilgąja kraštine parašytas dalmuo; jeigu ne, tai šitam rezultatui, kaip daugianariui $f(x)$, taikyti 1) veiksmą.

Apibendrinsime samprotavimų rezultatus.

D a l y b o s s u l i e k a n a t e o r e m a. ***Kiekvieną daugianarį*** $f(x)$ ***ir bet kurį nenulinį daugianarį*** $g(x)$ ***atitinka vienintelė daugianarių*** $q(x)$ ***ir*** $r(x)$ ***pora, su kuria teisinga lygybė***

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

ir arba $r(x)$ ***yra nulinis daugianaris, arba jo laipsnis yra mažesnis už*** $g(x)$ ***laipsnį.***

Trumpai šią teoremą galima suformuluoti šitaip: kiekvieną daugianarį galima vienareikšmiškai padalyti su liekana iš bet kurio nenulinio daugianario.

Padarysime dar vieną svarbią pastabą, kuria vėliau dažnai remsimės.

Iš dalijimo kampu taisyklės tiesiogiai išplaukia: jei daugianarių $f(x)$ ir $g(x)$ koeficientai yra sveikieji skaičiai, o daugianario $g(x)$ vyriausiasis koeficientas lygus 1, tai dalmuo ir liekana yra daugianariai su sveikais koeficientais.

Pratimai

10. Padalykite su liekana:

a) x^3+x^2-3x+1 iš x^4;
b) $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ iš x^2-3x;
c) x^5+x-1 iš $3x^5+x^2-2$.

11. Sakykime, $r(x)$ — daugianario $f(x)$ dalybos iš daugianario $g(x)$ liekana. Raskite daugianario $af(x)$ dalybos iš $bg(x)$ liekaną, kai a ir b — realieji skaičiai.

12. Kokie turi būti realieji skaičiai p ir m, kad daugianaris x^3+px+1 dalytųsi iš daugianario x^2+x+m?

13. Kokie turi būti realieji skaičiai a ir b, kad daugianaris ax^4+bx^3+1 dalytųsi iš $(x-1)^2$?

3. Bezu teorema ir jos išvados. Įrodysime teoremą, kuri svarbi ne tik pačiai daugianarių teorijai, bet ir daugelio uždavinių sprendimui.

B e z u t e o r e m a. Bet kurį daugianarį $f(x)$ padalysime su liekana iš dvinario $x-a$. Kadangi to dvinario laipsnis lygus 1, tai arba liekana lygi 0, arba jos laipsnis lygus 0. Ir vienu, ir kitu atveju liekana r yra skaičius. Todėl daugianaris $f(x)$ išreiškiamas šitaip:

$$f(x)=(x-a)q(x)+r.$$

Į šią tapatybę vietoj x įrašę a, įsitikiname, kad $f(a)=r$. Vadinasi, įrodėme, kad *daugianario dalybos iš dvinario $x-a$ liekana lygi to daugianario reikšmei, kai $x=a$.* Šį teiginį verta įsidėmėti.

Dar pabrėšime, jog visai analogiškai įrodoma, kad daugianario $f(x)$ dalybos iš $ax+b$ liekana lygi $f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Iš įrodyto teiginio išplaukia tokia teorema.

Teorema. ***Daugianaris $f(x)$ dalijasi iš $x-a$ tada ir tik tada, kai skaičius a yra to daugianario šaknis.***

Iš tikrųjų, $f(x)$ dalijasi iš $x-a$ tada ir tik tada, kai dalybos liekana lygi 0, o ta dalybos liekana, kaip ką tik įrodėme, lygi reikšmei $f(a)$. Todėl $f(x)$ dalijasi iš $x-a$ tada ir tik tada, kai $f(a)=0$.

Ši teorema vadinama Bezu teorema. Remdamiesi ja, išspręsime kelis uždavinius.

1. *Išspręskite lygtį* $x^3+2x^2+3x-22=0$.

Nesunku įsitikinti, kad skaičius 2 yra daugianario $f(x)=x^3+2x^2+3x-22$ šaknis. Pagal Bezu teoremą $f(x)$ dalijasi iš $x-2$, t. y.

$$f(x)=(x-2)(x^2+4x+11).$$

Vadinasi, reikia tik išspręsti kvadratinę lygtį $x^2+4x+11=0$. Kadangi šita lygtis neturi realių šaknų, tai skaičius 2 yra vienintelė reali pradinės lygties šaknis.

Šiuo uždaviniu atkreipėme dėmesį į bendrą faktą: jei žinome bent vieną algebrinės n-tojo laipsnio lygties šaknį, tai, remdamiesi Bezu teorema, galime, kaip sakoma, pažeminti lygties laipsnį, t. y. pradinę lygtį pakeisti $(n-1)$-jo laipsnio lygtimi. Šiuo metodu galima išspręsti bet kurią trečiojo laipsnio lygtį, žinoma, kai pavyksta atspėti vieną jos šaknį. Kaip atspėti algebrinės lygties šaknis, bus aiškinama 4 skyrelyje.

2. *Įrodykite, kad skaičius* $2^{35}+1$ *dalijasi iš* 11.

Sudarome daugianarį $f(x)=x^7+1$. Kadangi $f(-1)=0$, tai pagal Bezu teoremą

$$f(x)=(x+1)q(x).$$

Iš pastabos (žr. p. 75) išplaukia, kad daugianario $q(x)$ koeficientai yra sveikieji skaičiai. Vadinasi, $f(2^5)=2^{35}+1$ dalijasi iš $2^5+1=33$, t. y. dalijasi iš 3 ir iš 11.

3. *Įrodykite, kad* $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

Kairiąją nagrinėjamos lygybės pusę pažymėkime raide a. Tuomet

$$a^3=(20+14\sqrt{2})+(20-14\sqrt{2})+$$
$$+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\cdot a=6a+40.$$

Iš to aišku, kad skaičius a yra daugianario $f(x)=x^3-6x-40$ šaknis.

Kadangi $f(4)=0$, tai pagal Bezu teoremą $f(x)$ dalijasi iš $x-4$. Padalijç gauname lygybę

$$f(x)=(x-4)(x^2+4x+10).$$

Trinaris $x^2+4x+10$ neturi realių šaknų, todėl skaičius 4 yra vienintelė daugianario $f(x)$ šaknis. Vadinasi, $a=4$, o tai ir reikėjo įrodyti.

4. *Įrodykite, kad reiškinio*

$$(a-b)(a+b-c)^2c+(b-c)(b+c-a)^2a$$

reikšmė, kai a, b ir c yra sveikieji skaičiai, dalijasi iš $a-b+c$.

Duotąjį reiškinį laikysime kintamojo b daugianariu $f(b)$, o a ir c — fiksuotais parametrais. Apskaičiuosime daugianario $f(b)$ reikšmę, kai $b=a+c$:

$$f(a+c)=-c\cdot 4a^2c+a\cdot 4c^2a=0.$$

Pagal Bezu teoremą daugianaris $f(b)$ dalijasi iš $b-a-c$. Kadangi vyriausiasis $b-a-c$ koeficientas lygus 1, tai dalmens koeficientai bus sveikieji skaičiai (tai išplaukia iš pastabos, pateiktos 2 skyrelio pabaigoje). Todėl nurodytas sveikasis skaičius dalijasi iš $b-a-c$. Tai ir reikėjo įrodyti.

5. *Kokios turi būti k reikšmės, kad daugianaris*

$$x^3+y^3+z^3-kxyz,$$

kai y ir z — bet kurie realieji skaičiai, dalytųsi iš $x+y+z$?

Tą daugianarį pažymėkime $f(x)$. Jis dalijasi iš $x+y+z$ tada ir tik tada, kai skaičius $-(y+z)$ yra jo šaknis. Bet

$$f(-y-z)=-(y+z)^3+y^3+z^3+k(y+z)yz=$$
$$=-3y^2z-3yz^2+ky^2z+kyz^2=(k-3)(y^2z-yz^2).$$

Iš čia aišku, kad skaičius $k=3$ atitinka uždavinio sąlygą. Jeigu $k\neq 3$, tai reikšmė $f(-y-z)$ nelygi nuliui, kai $y\neq 0$, $z\neq 0$ ir $y\neq z$. Todėl $f(x)$, kai $k\neq 3$, nesidalija iš $x+y+z$. Vadinasi, uždavinio sąlygą atitinka tik $k=3$.

Padalijç nagrinėjamą daugianarį, kai $k=3$, iš $x+y+z$, gauname įdomią tapatybę

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

6. *Raskite daugianario $x^{105}+x+1$ dalybos iš x^2-1 ir iš x^2+1 liekanas.*

Jei daugianarį $f(x)=x^{105}+x+1$ padalysime su liekana iš x^2-1, tai gausime tapatybę

$$f(x)=(x^2-1)q(x)+ax+b,$$

kurios koeficientai a ir b — nežinomi skaičiai. Norint juos rasti, į gautąją tapatybę vietoj x reikia įrašyti trinario x^2-1 šaknis -1 ir 1. Gauname lygčių sistemą

$$-a+b=f(-1)=-1,\quad a+b=f(1)=3,$$

iš kurios sužinome, kad $a=2$, $b=1$. Vadinasi, liekana lygi $2x+1$.

Ką tik išmėgintas metodas nepritaikomas, kai reikia rasti daugianario $f(x)$ dalybos iš x^2+1 liekaną, nes trinaris x^2+1 neturi realių šaknų. To pavyzdžio sprendimo teks palaukti: kai sukursime kompleksinių skaičių teoriją, trinaris x^2+1 turės šaknis, todėl galėsime rasti reikalaujamą liekaną.

Pratimai

14. Išspręskite lygtį $x^3-3x+2=0$.

15. Įrodykite, kad skaičius $3^{60}+1$ dalijasi iš 82.

16. Raskite daugianario $x^{99}-3x^{98}+x^2+1$ dalybos iš x^2-4x+3 liekaną.

17. Daugianario $p(x)$ dalybos iš $x-2$ ir iš $x-3$ liekanos atitinkamai lygios 5 ir 7. Raskite to daugianario dalybos iš $(x-2)(x-3)$ liekaną.

18. Kokie turi būti koeficientai a ir b, kad daugianaris $x^{10}+ax^2+bx+1$ dalytųsi iš x^2-1?

19. Įrodykite, kad $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ dalijasi iš $(x-y)(y-z)(z-x)$, kai x, y ir z — sveikieji skaičiai.

20. Įrodykite, kad $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}=1$.

21. Duotas daugianaris $f(x)$. Yra žinoma, kad daugianaris $f(x^n)$ dalijasi iš $x-1$. Įrodykite, kad $f(x^n)$ dalijasi ir iš x^n-1.

Daugianario šaknų kartotinumas ir šaknų skaičius. Jei skaičius a yra daugianario $f(x)$ šaknis, tai $f(x)$, kaip teigia Bezu teorema, dalijasi iš $x-a$. Gali atsitikti, kad skaičius a bus dalmens šaknis. Savaime aišku, kad tokiu atveju daugianaris $f(x)$ dalijasi iš $(x-a)^2$. Panašiais atvejais skaičius a vadinamas kartotine daugianario šaknimi.

Apibrėžimas. *Skaičius a vadinamas k-karte daugianario $f(x)$ šaknimi, kai $f(x)$ dalijasi iš $(x-a)^k$, bet nesidalija iš $(x-a)^{k+1}$.*

Vienkartės šaknys vadinamos *paprastomis* šaknimis. Kartais kalbama ir apie nulinio kartotinumo šaknis: tai skaičiai, kurie nėra daugianario šaknys.

Pavyzdžiui, skaičius 1 yra daugianario $x^5-2x^4+x^3=x^3(x-1)^2$ dvikartė šaknis, skaičius 0 — trikartė šaknis, o skaičius 3 — nulinio kartotinumo šaknis.

Remdamiesi Bezu teorema, gauname svarbią išvadą — sužinome, kiek šaknų turi bet kuris daugianaris, būtent, *n-tojo laipsnio daugianario šaknų skaičius negali būti didesnis už n, net kiekvieną šaknį skaitant tiek kartų, koks jos kartotinumas.*

Iš tikrųjų, sakykime, daugianario $f(x)$ šaknys yra skaičiai

$$a_1, a_2, \dots, a_s,$$

o jų kartotinumai atitinkamai lygūs $k_1, k_2, \dots, k_s$. Tuomet

$$f(x)=(x-a_k)^{k_1}f_1(x).$$

Iš čia gauname $0=f(a_2)=(a_2-a_1)^{k_1}f_1(a_2)$; todėl $f_1(a_2)=0$.

Tarkime, kad a_2 yra daugianario $f_2(x)$ kartotinumo l_2 šaknis, t. y.

$$f_1(x)=(x-a_2)^{l_2}f_2(x),$$

be to, $f_2(x)$ nesidalija iš $x-a_2$, kitaip sakant,

$$f_2(a_2)\neq 0.$$

Tuomet iš lygybės

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{l_2}f_2(x)$$

sprendžiame, kad $f(x)$ dalijasi iš $(x-a_2)^{l_2}$, bet nesidalija iš $(x-a_2)^{l_2+1}$. Vadinasi, l_2 yra daugianario $f(x)$ šaknies a_2 kartotinumas, t. y. $l_2=k_2$.

Šiuo samprotavimu išvedėme lygybę

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}f_2(x).$$

Analogiškai samprotaudami toliau, gauname skaidinį

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_s)^{k_s}g(x).$$

Jei daugianarių $f(x)$ ir $g(x)$ laipsnius pažymėsime n ir m, tai gausime lygybę

$$n=k_1+k_2+\dots+k_s+m,$$

iš kurios išplaukia nelygybė

$$k_1+k_2+\dots+k_s\leqslant n.$$

Iš samprotavimų taip pat aišku, kad daugianaris $f(x)$ išskaidomas tiesiniais dauginamaisiais tada ir tik tada, kai $m=0$. Tuomet

$$k_1+k_2+\dots+k_s=n,$$

t. y. šaknų kartotinumų suma lygi daugianario $f(x)$ laipsniui. Tokiu atveju sakoma šiek tiek kitaip: daugianario šaknų skaičius, atsižvelgiant į jų kartotinumą, lygus daugianario laipsniui.

Primename, kad 1 skyrelyje įrodėme, jog tuo atveju, kai daugianariai yra lygūs, t. y. kai jie įgyja vienodas reikšmes visuose taškuose $x \in \mathbf{R}$, tų daugianarių koeficientai prie vienodų x laipsnių sutampa. Dabar galima tą teiginį sugriežtinti.

Vienaties teorema. ***Jei dviejų daugianarių laipsniai ne aukštesni už n ir jų reikšmės sutampa $n+1$ taške, tai tie daugianariai yra lygūs.***

Įrodymas. Tarkime, kad $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ yra skirtingi skaičiai, o $f(x)$ ir $g(x)$ — daugianariai, kurių laipsnis ne aukštesnis už n ir kurie tuose taškuose įgyja vienodas reikšmes.

Jei tų daugianarių skirtumas $h(x)$ nėra nulinis daugianaris, tai jo laipsnis ne aukštesnis už n. Tačiau

$$h(a_i) = f(a_i) - g(a_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

t. y. $h(x)$ turi ne mažiau kaip $n+1$ šaknį. Tai prieštarauja teiginiui apie daugianario šaknų skaičių. Vadinasi, $h(x)$ yra nulinis daugianaris, o iš to išplaukia $f(x) = g(x)$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Pavadinimas *vienaties teorema* paaiškinamas tuo, kad šią teoremą galima pasakyti ir kitaip: n-tojo laipsnio daugianaris vienareikšmiškai apibrėžiamas jo reikšmėmis $n+1$ taške.

Norėdami parodyti, kaip pritaikoma vienaties teorema, išspręsime uždavinį.

Įrodykite teiginį: jei a, b ir c yra kas du skirtingi skaičiai, tai teisinga tokia tapatybė:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1.$$

Šios tapatybės kairiąją pusę pažymėkime $f(x)$. Tuomet

$$f(a) - 1 = \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} - 1 = 0.$$

Panašiai įsitikiname, kad $f(b) - 1 = 0$ ir $f(c) - 1 = 0$.

Antra vertus, lengva pastebėti, kad daugianario $f(x) - 1$ laipsnis ne didesnis už 2. Todėl tas daugianaris negali turėti daugiau kaip dvi šaknis. Vadinasi, $f(x) - 1$ yra nulinis daugianaris. Iš to išplaukia įrodinėjamas teiginys.

Pratimai

22. Raskite daugianario $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ šaknies $x = 1$ kartotinumą.

23. Rasti tokį skaičių a, kad skaičius 1 būtų daugianario $x^5+2ax+1$ šaknis. Koks tos šaknies kartotinumas?

24. Įrodykite, kad k-kartė daugianario $f(x)$ šaknis yra $(k-1)$-kartė jo išvestinės $f'(x)$ šaknis.

25. Raskite visus daugianarius, kurie dalijasi iš savo išvestinių.

26. Kokie turi būti realieji skaičiai a ir b, kad daugianaris ax^5+bx^4+1 turėtų kartotinę šaknį?

27. Raskite tokias koeficientų a, b ir c reikšmes, kad skaičius -1 būtų trikartė lygties $x^5+ax^3+bx+c=0$ šaknis.

28. Jei visos daugianario $g(x)$ šaknys yra realios, paprastos ir kartu yra daugianario $f(x)$ šaknys, tai $f(x)$ dalijasi iš $g(x)$. Įrodykite.

29. Išspręskite lygtį

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}=1,$$

kai a, b, c ir d yra kas du skirtingi realūs skaičiai.

4. Daugianariai su sveikais koeficientais. Anksčiau kalbėjome apie vieną svarbų Bezu teoremos pritaikymą: jei reikia išspręsti n-tojo laipsnio lygtį, kurios vieną šaknį žinome, tai Bezu teorema padeda tos lygties sprendimą pakeisti $(n-1)$-jo laipsnio lygties sprendimu.

Kyla natūralus klausimas: iš kur paimti tą šaknį? Kai daugianario koeficientai yra sveiki skaičiai, galima rasti jo racionaliąsias (aišku, ir sveikąsias) šaknis, žinoma, jei tokių šaknų esama.

Daugianario su sveikais koeficientais racionaliųjų šaknų ieškojimo metodą nurodo ši teorema.

Teorema. ***Jei nesuprastinama trupmena*** $\frac{p}{q}$ ***yra daugianario su sveikais koeficientais šaknis, tai jo laisvasis narys dalijasi iš*** p, ***o vyriausiasis koeficientas — iš*** q.

Įrodymas. Sakykime, skaičius $\frac{p}{q}$ yra daugianario su sveikais koeficientais

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

šaknis. Skaičiai p ir q, kaip pasakyta sąlygoje, yra reliatyviai pirminiai: jie neturi bendrų daliklių, išskyrus 1 ir -1. Lygybę $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$, arba

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0$$

užrašysime dviem būdais:

$$-p(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+\ldots+a_{n-1}q^{n-1})=a_nq^n,$$
$$a_0p^n=-(a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1})q.$$

Iš pirmosios lygybės aišku, kad sandauga a_nq^n dalijasi iš p, o kadangi q^n ir p neturi bendrų daliklių, tai iš p turi dalytis a_n. Panašiai įsitikiname iš antros lygybės, kad a_0 dalijasi iš q. Teorema įrodyta.

Iš tos teoremos išplaukia akivaizdi išvada: *jei daugianario su sveikais koeficientais vyriausiasis koeficientas lygus* 1, *tai racionaliosios daugianario šaknys yra sveiki skaičiai.*

Iš tikrųjų, kadangi tokiu atveju racionaliosios šaknies $\frac{p}{q}$ vardiklis q gali būti tik 1, tai šaknis $\frac{p}{q}$ yra sveikas skaičius.

Atkreipsime dėmesį, kad teiginys, atvirkštinis ką tik įrodytai teoremai, nėra teisingas: jei p yra daugianario $f(x)$ laisvojo nario daliklis, o q — vyriausiojo koeficiento daliklis, tai iš to neišplaukia, kad $\frac{p}{q}$ yra daugianario $f(x)$ šaknis. Jei atvirkštinis teiginys būtų teisingas, tai, pavyzdžiui, daugianaris $x-2$ turėtų keturias šaknis: 1, -1, 2 ir -2.

Remdamiesi įrodytąja teorema, išspręsime keletą uždavinių.

1. *Išspręskite lygtį* $x^3+5x^2-2x-24=0$.

Kadangi daugianario $f(x)$, parašyto kairėje šios lygties pusėje, vyriausiasis koeficientas lygus 1, tai tos lygties racionaliosios šaknys yra sveiki skaičiai, iš kurių, kaip įrodyta teoremoje, dalijasi skaičius 24. Todėl sveikosiomis šaknimis gali būti skaičiai ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12, ±24. Savaime aišku, nuosekliai tikrinti visus šiuos skaičius labai nemalonu.

Mūsų laimei, šiuo atveju šaknį randame gana greitai: įsitikinę, kad $f(1)\neq0$ ir $f(-1)\neq0$, nustatome, kad $f(2)=0$. Paskui, daugianarį $f(x)$ padalijię iš $x-2$, gauname lygtį

$$(x-2)(x^2+7x+12)=0,$$

iš kurios sužinome, kad pradinės lygties šaknys yra skaičiai 2, -3 ir -4.

Pabrėžiame, kad praktiškai taikyti realiųjų šaknų teoremą, kaip matyti iš paskutinio pavyzdžio, dažnai būna sunku; reikia daug skaičiuoti, patikrinti daug „kandidatų" į šaknis. Tą tikrinimą kartais pavyksta įvairiais samprotavimais gerokai sutrumpinti. Viena teorema, padedanti suprastinti tokių uždavinių sprendimą, suformuluota 33 pratime.

2. *Išspręskite lygtį* $4x^5+4x^4+x^3-2x^2-2x+1=0$.

„Kandidatai“ į racionaliosios šaknies skaitiklį šiuo atveju yra tik ± 1, o „kandidatai“ į vardiklį — skaičiai 1, 2 ir 4. Pabrėžiame, kad trupmenos vardiklį visuomet galima laikyti teigiamu. Vadinasi, lygties racionaliosios šaknys gali būti kai kurie iš skaičių $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.

Tikrinant paaiškėja, kad $f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, todėl, padalijus iš $(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, gaunama lygtis

$$2x^3+x^2+x-1=0.$$

Čia svarbu nepamiršti, kad šaknys -1 ir $\frac{1}{2}$ gali būti ir gautos lygties šaknys. Iš tikrųjų, $\frac{1}{2}$ yra tos lygties šaknis, todėl iš paskutinės lygties gauname kvadratinę lygtį.

Galų gale įsitikiname, kad pradinės lygties šaknys yra skaičiai -1 ir $\frac{1}{2}$. Atkreipkite dėmesį, kad skaičius $\frac{1}{2}$ yra kairėje pradinės lygties pusėje parašyto daugianario dvikartė šaknis, bet šiuo atveju, sprendžiant lygtį, mūsų tai nedomina.

3. *Raskite daugianario* $f(x)=x^{37}-2x^{11}+2x^3-6x^2-97$ *racionaliąsias šaknis.*

Kadangi daugianario $f(x)$ vyriausiasis koeficientas lygus 1, tai visos jo racionaliosios šaknys yra sveiki skaičiai, t. y. laisvojo nario (-97) dalikliai. Skaičius 97 yra pirminis, todėl tikrinti reikia tik keturis skaičius: ± 1 ir ± 97. Lengva įsitikinti, kad skaičiai 1 ir -1 nėra šaknys. Antra vertus, kai $x=97$, daugianario $f(x)$ vyriausiojo nario modulis yra daug didesnis už kitų narių sumos modulį. Todėl 97 ir -97 irgi nėra daugianario $f(x)$ šaknys. Vadinasi, $f(x)$ neturi racionalių šaknų.

Savaime aišku, kad samprotavome nepakankamai tiksliai. Galima ir formaliau įrodyti, kad 97 ir -97 nėra šaknys. Tai galima padaryti, pavyzdžiui, šitaip: jei $x>1$, tai

$$|2x^{11}-2x^3+6x^2+97| \leqslant 2x^{11}+2x^3+6x^2+97<$$
$$<97(x^{11}+x^3+x^2+1)<97\cdot 4x^{12},$$

todėl daugianario $f(x)$ vyriausiojo nario modulis, kai $x=\pm 97$, tikrai yra didesnis už kitų narių sumos modulį.

4. *Išspręskite lygtį* $\sin x+\sin 3x=\frac{3}{2}$.

Sinusų sumą išreiškę sandauga ir pritaikę dvigubo kampo sinuso formulę, lygtį galėsime parašyti šitaip:

$$8 \sin x \cos^2 x=3.$$

Iš čia, vietoj $\cos^2 x$ parašę $1-\sin^2 x$, gauname kubinę kintamojo $t=\sin x$ lygtį $8t^3-8t+3=0$. Remdamiesi teorema, įsitikiname, kad tos lygties šaknis yra $t_1=\frac{1}{2}$, ir sudarome kvadratinę lygtį

$$4t^2+2t-3=0.$$

Šios lygties šaknys yra skaičiai $t_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$ ir $t_3=\frac{-1-\sqrt{13}}{4}$. Kadangi $t_3<-1$, tai gauname dvi sprendinių aibes:

$$(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ ir } (-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4}+k\pi \quad (k\in Z).$$

Pratimai

30. Raskite lygčių racionaliąsias šaknis:
a) $3x^3-4x^2+5x-18=0$; b) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24=0$.

31. Įrodykite, kad daugianaris $f(x)$ su sveikais koeficientais, kai $f(0)$ ir $f(1)$ yra nelyginiai skaičiai, neturi sveikų šaknų.

32. Įrodykite, kad lygtis $x^4-3x^3y=y^4$ neturi sveikų sprendinių, išskyrus $(0, 0)$.

33. Jei nesuprastinama trupmena $\frac{p}{q}$ yra daugianario $p(x)$ su sveikais koeficientais šaknis, tai $p(1)$ dalijasi iš $p-q$, o $p(-1)$ — iš $p+q$. Įrodykite.

34. Ar egzistuoja toks daugianaris $p(x)$ su sveikais koeficientais, kad $p(1)=1979$, o $p(3)=1980$?

35. Jei daugianario $f(x)$ koeficientai yra sveiki skaičiai, o jo reikšmės $f(2)$ ir $f(3)$ dalijasi iš 6, tai $f(5)$ irgi dalijasi iš 6. Įrodykite.

§ 3. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI

1. Kompleksinių skaičių aibės sudarymas. Šiame skyrelyje tiksliai apibrėšime kompleksinio skaičiaus sąvoką, išsiaiškinsime kompleksinių skaičių ir realiųjų skaičių ryšius, aptarsime kompleksinių skaičių veiksmų savybes.

Kompleksiniai skaičiai ir jų veiksmai. Sudarysime formalius reiškinius $a+bi$, kurių a ir b — bet kurie realieji skaičiai. Tokių reiškinių pavyzdžiai gali būti

$$2+(-3)i,\ 0+0i,\ 1+(-\sqrt{3})i,\ 0+1i.$$

Vadindami tuos reiškinius formaliais, pabrėžiame, kad jiems neteikiame prasmės, nekeliame klausimo, ką jie reiškia, negalvojame, kuo tie reiškiniai gali būti naudingi praktikoje. Juos suvo-

kiame visiškai formaliai: norint sudaryti tokį reiškinį, reikia imti du skirtingus arba vienodus realius skaičius a ir b ir, vartojant pagalbinius ženklus „+“ ir i, sudaryti nurodytojo pavidalo reiškinį.

Nesidomime pagalbinių ženklų „+“ ir i prasme. Ženklas „+“ čia nėra įprastas sudėties ženklas (sudėties ženklas „+“ rašomas tarp dviejų realių skaičių arba tarp skaitinių reiškinių, bet niekas jo nerašo, sakysime, tarp dviejų tiesių, nes sudėti tieses beprasmiška: sąvokos „tiesių suma“ nėra). Čia ženklas „+“ tiesiog formalus ženklas „status kryželis“. Ženklas i čia taip pat nieko nereiškia.

Sudaryti formalūs reiškiniai yra visiškai nauji objektai, todėl pirmiausia reikia susitarti, kaip tuos reiškinius atskirti vieną nuo kito, kada du tokius reiškinius laikome lygiais ir kada — skirtingais. Pateiksime apibrėžimą.

1 apibrėžimas. *Reiškiniai* $a+bi$ *ir* $c+di$ *vadinami lygiais tada ir tik tada, kai* $a=c$ *ir* $b=d$.

Kai reiškiniai $a+bi$ ir $c+di$ lygūs, natūralu rašyti $a+bi= =c+di$.

Dabar mokysimės atlikti nagrinėjamų reiškinių tokius aritmetinius veiksmus, kokius atliekame su realiaisiais skaičiais.

2 apibrėžimas. *Reiškinių* $a+bi$ ir $c+di$ *suma vadinamas reiškinys* $(a+c)+(b+d)i$.

Reiškinių $a+bi$ ir $c+di$ suma žymima šitaip:

$$(a+bi)+(c+di).$$

Vadinasi,

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i. \quad (1)$$

3 apibrėžimas. *Reiškinių* $a+bi$ *ir* $c+di$ *sandauga vadinamas reiškinys* $(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Reiškinių $a+bi$ ir $c+di$ sandauga žymima šitaip:

$$(a+bi)(c+di).$$

Vadinasi, pagal apibrėžimą

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i. \quad (2)$$

Atkreipkime dėmesį, kad (1) lygybėje ženklas „+“ pavartotas iškart trimis prasmėmis: kaip realiųjų skaičių sudėties ženklas (pirmasis ir trečiasis „+“ dešinėje pusėje), kaip sudarytų reiškinių sumos ženklas (antrasis „+“ kairėje pusėje) ir formalus ženklas „status kryželis“ (kitais atvejais).

Nuo šio momento nagrinėjamus formalius reiškinius pradėsime vadinti *kompleksiniais skaičiais*. Tiesą sakant, šį terminą galėjome vartoti iš pat pradžios, bet galvojame, kad bus geriau jį pradėti vartoti, apibrėžus tų formaliųjų reiškinių veiksmus, primenančius pagrindinius aritmetinius realiųjų skaičių veiksmus.

Kompleksinių skaičių aibę įprasta žymėti raide **C**. Vadinasi, aibėje **C** apibrėžėme du veiksmus, arba, kaip sakoma algebroje, dvi *operacijas* — sudėtį ir daugybą. Tų operacijų savybės sutampa su daugybos ir sudėties savybėmis realiųjų skaičių aibėje, būtent, galioja sudėties ir daugybos komutatyvumo (perstatymo) ir asociatyvumo (jungimo) dėsniai, sudėtį su daugyba sieja distributyvumo (skirstymo) dėsnis. Be to, aibėje **C** yra „ypatingi" elementai $0+0i$ ir $1+0i$, su kuriais, kaip lengva patikrinti, visada teisingos šios lygybės:

$$(x+yi)+(0+0i)=x+yi, \quad (x+yi)(1+0i)=x+yi,$$

t. y. minėtų elementų vaidmuo aibėje **C** toks pat, kaip 0 ir 1 aibėje **R**.

Be dviejų pagrindinių operacijų, aibėje **C** apibrėžiamos dar dvi operacijos — atimtis ir dalyba. Tos operacijos yra tam tikra prasme išvestinės iš sudėties ir daugybos. Tai visiškai aišku iš tų operacijų apibrėžimo.

4 apibrėžimas. *Kompleksinis skaičius z vadinamas kompleksinių skaičių x ir y skirtumu, kai $z+y=x$.*

5 apibrėžimas. *Kompleksinis skaičius z vadinamas kompleksinių skaičių x ir y dalmeniu, kai $zy=x$.*

Atkreipkime dėmesį, kad 4 ir 5 apibrėžimai iš esmės skiriasi nuo 2 ir 3 apibrėžimų: 2 ir 3 apibrėžimuose tiesiogiai pasakyta, kaip apskaičiuoti kompleksinių skaičių sumą ir sandaugą, o 4 ir 5 apibrėžimuose ne tik nenurodyta, kaip apskaičiuoti skirtumą ir dalmenį, bet ir neaišku, ar visada egzistuoja skirtumas ir dalmuo, ar jie apibrėžti vienareikšmiškai.

Įsitikinsime, kad tuo atveju, kai skaičius x nelygus $0+0i$, kiekvieną x atitinka vienintelis skaičių x ir y dalmuo. Iš tikrųjų, tarę, kad $x=a+bi$, $y=c+di$, ieškosime dalmens $z=u+vi$. Tuomet turi būti teisinga lygybė

$$(u+vi)(c+di)=a+bi,$$

arba

$$(uc-vd)+(ud+vc)i=a+bi.$$

Iš šios lygybės, remdamiesi 1 apibrėžimu, gauname dvi lygybes:

$$uc - vd = a, \quad ud + vc = b.$$

Jei abi pirmos lygybės puses padauginsime iš c, o antrosios — iš d, tai, sudėję gautas lygybes, turėsime

$$u(c^2 + d^2) = ac + bd.$$

Analogiškai įsitikiname, kad

$$v(c^2 + d^2) = bc - ad.$$

Realusis skaičius $c^2 + d^2$ nelygus 0, nes priešingu atveju būtų $c = d = 0$, o tuomet $y = 0 + 0i$, kas prieštarauja prielaidai. Todėl iš turimų lygybių gauname

$$u = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad v = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Vadinasi, skaičius

$$z = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

yra vienintelis skaičių $a + bi$ ir $c + di$ dalmuo. Kompleksinių skaičių x ir y dalmenį žymime $\frac{x}{y}$, todėl galutinai

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Šios griozdiškos formulės atsiminti nereikia, nes praktiškai dalmuo apskaičiuojamas kitaip, remiantis jungtinio skaičiaus sąvoka.

Neįrodinėsime, kad visada egzistuoja vienintelis dviejų kompleksinių skaičių skirtumas. Norint tuo įsitikinti, reikia samprotauti panašiai, kaip ir apie dalmenį, tik šiuo atveju išvedimas techniniu atžvilgiu daug paprastesnis. Kompleksinių skaičių x ir y skirtumas žymimas $x - y$.

Vadinasi, aibėje **C** apibrėžėme visas keturias aritmetines operacijas. Jos turi tas pačias savybes, kaip ir atitinkamos operacijos realiųjų skaičių aibėje. Todėl visa skaitinių reiškinių pertvarkymo technika, visa kompleksinių skaičių aritmetika, susijusi su šiomis keturiomis operacijomis, niekuo nesiskiria nuo realiųjų skaičių aritmetikos.

Realieji ir kompleksiniai skaičiai. Ką tik pateikėme apibrėžimus, kurie sudaro kompleksinių skaičių teorijos pagrindą. Dabar reikia sukurti pačią teoriją. Tačiau pirmiausia pasistengsime atsakyti į du klausimus: pirma, kodėl formalieji reiškiniai su nurodytomis jų veiksmų taisyklėmis vadinami skai-

čiais, antra, jeigu jie jau taip pavadinti, tai kas tarp kompleksinių skaičių ir realiųjų skaičių yra bendra.

Pirmasis klausimas, aišku, visai ne matematiškas, nes, pirma, kalbama apie pavadinimą, o tai ne matematinių samprotavimų objektas, o antra, matematikoje neapibrėžiama, kas yra skaičius, todėl ginčytis, ar tie reiškiniai yra skaičiai, ar ne skaičiai, tiesiog beprasmiška.

Antrasis klausimas turiningesnis. Iki šiol, sudarius naujus skaičius, visada „senasis" skaičius būdavo atskiras „naujojo" skaičiaus atvejis: kiekvienas natūrinis skaičius yra sveikas, kiekvienas sveikasis skaičius yra racionalus, kiekvienas racionalusis skaičius yra realus. Norėtųsi, kad ir kiekvienas realusis skaičius būtų kompleksinis, kad realiųjų skaičių aibė **R** būtų kompleksinių skaičių aibės **C** dalis.

Tiksliai kalbant, to net negali būti: „kompleksiniai skaičiai"— tai visai ne skaičiai, o formalūs reiškiniai, todėl nėra prasmės net kalbėti, kad realusis skaičius yra „kompleksinis skaičius". Ir vis dėlto yra išeitis iš šios padėties.

Kompleksinius skaičius $a+0i$ pavadinsime „realiais" ir vietoj $a+0i$ rašysime tiesiog a. Vadinasi, tuo pačiu simboliu a žymėsime ir realų skaičių a, ir „realų" kompleksinį skaičių $a+0i$. Todėl toliau reikės visą laiką galvoti, kuria prasme pavartotas turimas simbolis.

Pavyzdžiui, savaime aišku, kad užraše $2<3$ kalbama tik apie realiuosius skaičius, nes kompleksinių skaičių aibėje neapibrėžėme sąryšio „mažiau" (ir ženklo $<$).

Tačiau toks reiškinys, kaip $(2\cdot 3+2)\cdot 4+1$, turi prasmę ir tada, kai 1, 2, 3, 4 reiškia realiuosius skaičius, ir tada, kai 1, 2, 3, 4 yra kompleksiniai skaičiai. Tik antruoju atveju ženklais „+" ir „·" pažymėtus veiksmus reikia atlikti pagal (1) ir (2) formules.

Pasirodo, kad galų gale nesvarbu, kokią prasmę teikiame minėtam ir jį panašiems reiškiniams, sudarytiems iš realiųjų skaičių simbolių ir sudėties bei daugybos ženklų. Iš tikrųjų, sakykime, kad $a+0i$ ir $c+0i$ yra bet kurie „realūs" kompleksiniai skaičiai, ir apskaičiuokime jų sumą bei sandaugą pagal (1) ir (2) formules:

$$(a+0i)+(c+0i)=(a+c)+0i,$$
$$(a+0i)(c+0i)=ac+0i.$$

Matome, kad „realiųjų" skaičių $a+0i$ ir $c+0i$ suma yra „realusis" skaičius $a+c$, o jų sandauga —„realusis" skaičius ac. Va-

dinasi, „realieji“ skaičiai sudedami ir dauginami visiškai taip pat, kaip ir realieji skaičiai be kabučių, t. y. „realieji“ skaičiai nuo tikrų realiųjų skaičių skiriasi tik žymėjimu. Todėl tuos skaičius galima, kaip sakoma, sutapatinti, t. y. kompleksinį skaičių $a+0i$ laikyti *lygiu* realiajam skaičiui a.

Po šio sutapatinimo realiųjų skaičių aibė **R** virsta kompleksinių skaičių aibės **C** dalimi, kitaip sakant, kiekvienas realusis skaičius tampa kompleksiniu skaičiumi. Savaime aišku, kad, kurdami teoriją, šio požiūrio laikysimės.

Išsiaiškinę, kaip kompleksiniai skaičiai yra susiję su realiaisiais, galime iš dalies atsakyti ir į pirmą klausimą: kodėl formalieji reiškiniai vadinami skaičiais? Tas pavadinimas jau nėra toks nenatūralus, kaip atrodė anksčiau, nes sudarytoji aibė apima realiųjų skaičių aibę. Vadinasi, kompleksinio skaičiaus sąvoką galime laikyti realiojo skaičiaus sąvokos plėtiniu ir naująją sąvoką vadinti ankstesniu terminu, suteikiant tam terminui platesnę prasmę.

Mokyklinėje matematikoje, plečiant sąvoką, teko palikti tą patį pavadinimą. Pavyzdžiui, plėsdami laipsnio sąvoką, iš pradžių laipsniu susitarėme vadinti vienodų dauginamųjų sandaugą, o paskui šią sąvoką taip išplėtėme, kad tarp jos ir sandaugos liko mažai kas bendra. Nežiūrint to, buvo paliktas senasis pavadinimas „laipsnis“, pridedant, kai to reikia, atitinkamą patikslinimą: laipsnis su sveikuoju rodikliu, laipsnis su racionaliuoju rodikliu ir t. t.

Skaičius i. Siekdami supaprastinti kompleksinių skaičių aritmetiką ir palengvinti jų veiksmus, samprotausime šitaip.

Kompleksinį skaičių $0+1i$ trumpai žymėsime i. Dabar simbolis i turės dvi prasmes: tai bus ir pradinis nieko nereiškiantis simbolis, ir kompleksinis skaičius $0+1i$. Be to, pasirodo, kad ir kiekvieną kompleksinį skaičių $a+bi$ galima suvokti dvejopai — arba kaip pradinį formalų reiškinį, arba kaip kompleksinio skaičiaus $a=a+0i$ ir kompleksinių skaičių $b=b+0i$ ir $i=0+1i$ sandaugos sumą.

Lengva įsitikinti, kad, laikydamiesi ir vieno, ir kito požiūrio, gauname tą patį rezultatą:

$$(a+0i)+(b+0i)(0+1i)=(a+0i)+((b\cdot 0-0\cdot 1)+$$
$$+(b\cdot 1+0\cdot 0)i)=(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=$$
$$=a+bi.$$

Dabar (1) ir (2) formules irgi galima traktuoti naujoviškai. Pavyzdžiui, remdamiesi kompleksinių skaičių veiksmų savybėmis

ir tardami, kad a, b, c, d ir i yra atskiri kompleksiniai skaičiai, sudėkime $a+bi$ ir $c+di$:

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=$$
$$=a+c+bi+di=(a+c)+(b+d)i.$$

Vadinasi, gavome tą rezultatą, kuris nurodytas (1) formulėje. Žinoma, tai nereiškia, kad išvedėme (1) formulę: prieš nagrinėjant veiksmų savybes, kuriomis dabar rėmėmės, reikėjo apibrėžti pačius veiksmus, o tai padaryta kaip tik parašius (1) ir (2) formules.

Prieš pereinant prie (2) formulės, reikia apskaičiuoti sandaugą $i^2=ii$:

$$i^2=(0+1i)(0+1i)=-1+0i=-1.$$

Dabar, atsižvelgdami į tai, kad $i^2=-1$ ir tardami, kad a, b, c, d ir i yra atskiri kompleksiniai skaičiai, padauginkime $a+bi$ iš $c+di$:

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=$$
$$=ac-bd+bci+adi=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Vadinasi, ir šiuo atveju gavome tai, kas buvo pasakyta pradinė formule.

Samprotavimus galima apibendrinti šitaip: atliekant veiksmus su kompleksiniais skaičiais, neprivaloma atsiminti formalius apibrėžimus, išreikštus (1) ir (2) formulėmis; su tais skaičiais galima elgtis kaip su paprastais dvinariais, pakeičiant, kai reikia, reiškinį i^2 skaičiumi -1.

Menamieji ir grynai menamieji skaičiai. Baigdami šį skyrelį, pateiksime dar kelis terminus, dažnai vartojamus, kalbant apie kompleksinius skaičius ir sprendžiant uždavinius.

Realusis skaičius a vadinamas kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ *realiąja dalimi*, o skaičius b (realus!) — jo *menamąja dalimi* (arba menamosios dalies koeficientu). Skaičiaus z realiąją ir menamąją dalį atitinkamai žymime Re z ir Im z. Vadinasi, pagal apibrėžimą

$$\mathrm{Re}(a+bi)=a, \ \mathrm{Im}(a+bi)=b.$$

Jau žinome, kad kompleksiniai skaičiai, kurių menamoji dalis lygi nuliui, yra realūs skaičiai. Skaičiai, kurių realioji dalis lygi nuliui, vadinami *grynai menamais*. Kompleksiniai skaičiai, kurie nėra realūs, vadinami *menamais* skaičiais. Atkreipsime dėmesį į įdomų faktą, kad pagal šią terminiją skaičius 0 yra iš karto ir realus, ir grynai menamas, bet nėra menamas.

Pratimai

36. Apskaičiuokite:

a) $(1+i)(3-2i)$;   d) $(1+i)^{1980}$;   g) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$;

b) $\frac{1+i}{1-2i}$;   e) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}$;   h) $\frac{(1-i)^9}{(1+i)^{10}}$;

c) $\frac{1+i}{2-i}+\frac{1-i}{4+2i}$;   f) i^n;   i) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{1980}$.

37. Raskite realius skaičius x ir y, su kuriais:

a) $(2+i)x+(4-i)y=2+3i$;

b) $(-3+i)x+(1+2i)y=i$.

38. Raskite visus lygties sprendinius:

a) $(1+i)z=3-iz$;   c) $z^2=3+4i$;

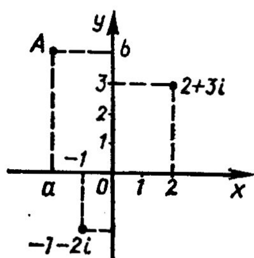
b) $z^2=i$;   d) $z^2-2iz+1=0$.

2. Kompleksinių skaičių geometrinis vaizdavimas. Kompleksinius skaičius, kaip ir realiuosius, galima visai paprastai interpretuoti geometriškai, tik vietoj koordinačių tiesės reikia imti koordinačių plokštumą. Kompleksinių skaičių geometrinė interpretacija tam tikra prasme yra svarbesnė už realiųjų skaičių geometrinę interpretaciją, nes, ja remdamiesi, galime vaizdžiai aiškinti ne tik pačius skaičius, bet ir jų veiksmus, o tai padeda spręsti tiek pačios kompleksinių skaičių teorijos klausimus, tiek ir kitokio pobūdžio (pavyzdžiui, geometrinius) uždavinius.

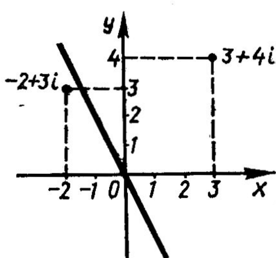
Kompleksinių skaičių aibės ir plokštumos taškų aibės atitiktis. Kiekvieną kompleksinį skaičių $z=a+bi$ atitinka taškas A, kurio koordinatės (a, b). Tokiu atveju sakoma, kad taškas A vaizduoja kompleksinį skaičių z (1 pav.).

Šita kompleksinių skaičių aibės **C** ir plokštumos taškų aibės atitiktis yra abipus vienareikšmė: kiekvienas kompleksinis skaičius vaizduojamas vieninteliu tašku, kiekvienas taškas vaizduoja vienintelį kompleksinį skaičių. Todėl, prastindami kalbą, plokštumos taškus dažnai vadiname kompleksiniais skaičiais. Toks prastinimas faktiškai ne naujas, nes, kalbėdami apie realiuosius skaičius, irgi dažnai neskiriame skaičių nuo juos vaizduojančių tiesės taškų.

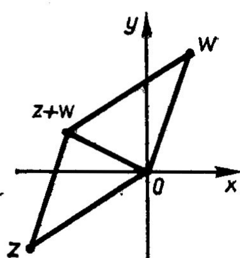
Geometrijos terminus vartosime tada, kai jie palengvins aiškinimą. Pavyzdžiui, sakysime, kad skaičius $-2+3i$ yra antrajame ketvirtyje (2 pav.), kad skaičius $3+4i$ priklauso apskritimui, kurio spindulys lygus 5, o centras sutampa su O, kad skaičiai $x-2xi$ sudaro tiesę $y=-2x$ ir t. t.



1 pav.



2 pav.



3 pav.

Kompleksinių skaičių geometriniu vaizdu galima lengvai paaiškinti jų sudėtį ir atimtį. Būtent, jei kompleksiniai skaičiai z ir w pavaizduoti taškais, tai jų sumą $z+w$ vaizduoja 3 paveiksle parodyto lygiagretainio viršūnė.

Labai pravartu įsidėmėti, kad taškas $z+w$ gaunamas iš taško z lygiagrečiuoju postūmiu — vektoriumi $\overrightarrow{Ow}$. Pavyzdžiui, taškas $z-2$ gaunamas, pastūmus tašką z į kairę atstumu, lygiu 2 (4 pav.), o taškas $z+i$, — pastūmus aukštyn atstumu, lygiu 1. Taškas $z+1-3i$ gaunamas iš taško z, atlikus vieną po kito du postūmius: iš pradžių atstumu, lygiu 1, į dešinę, o paskui atstumu, lygiu 3, žemyn.

Aiškindami geometriškai atimtį, atkreipsime dėmesį į tai, kad atimtį galima pakeisti sudėtimi:

$$z-w=z+(-w).$$

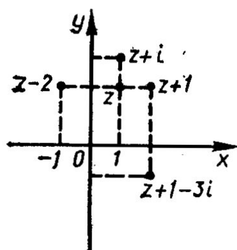
Todėl skirtumą $z-w$ irgi randame pagal lygiagretainio taisyklę (5 pav.).

Vis dėlto uždavinių sprendimui svarbiausias faktas yra tas, kad atstumas nuo taško 0 iki $z-w$ lygus atstumui nuo taško z iki w.

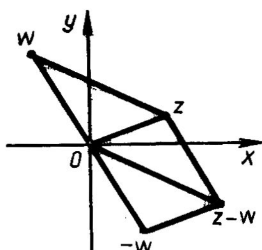
Kompleksinių skaičių daugybą ir dalybą geometriškai paaiškinti tokio paprasto samprotavimo nepakanka: reikia susipažinti dar su dviem sąvokomis. Tarp kitko, tos sąvokos kompleksinių skaičių teorijai svarbios ir nepriklausomos nuo geometrinių klausimų.

Kompleksinio skaičiaus modulis ir argumentas.

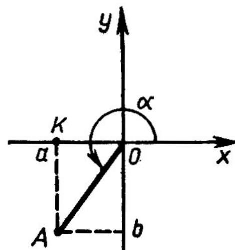
Apibrėžimas. *Jei taškas A, nesutampantis su O, vaizduoja kompleksinį skaičių z, tai atstumas |OA| vadinamas skaičiaus z moduliu.*



4 pav.



5 pav.



6 pav.

Kampą (arba jo didumą) tarp teigiamosios abscisių ašies krypties ir vektoriaus $\overrightarrow{OA}$, matuojamą prieš laikrodžio rodyklę, vadiname skaičiaus z pagrindiniu argumentu (6 pav.).

Skaičiaus z modulis ir pagrindinis argumentas atitinkamai žymimi $|z|$ ir $\arg z$. Nulio modulis laikomas lygiu 0, o nulio pagrindinis argumentas visai neapibrėžiamas. Vadinasi, $|z|$ yra neneigiamas realus skaičius, o $\arg z$ — skaičius, priklausantis intervalui $[0;\ 2\pi[$.

Dar pridursime, kad kiekvienas kampas, kuris nuo skaičiaus z pagrindinio argumento skiriasi dydžiu $2k\pi$ (k — sveikasis skaičius), vadinamas skaičiaus z *argumentu*. Pavyzdžiui, skaičiaus i pagrindinis argumentas lygus $\frac{\pi}{2}$, o visi jo argumentai reiškiami suma $\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Prieš imdamiesi daugybos ir dalybos geometrinio aiškinimo, išspręsime keletą uždavinių, susijusių su kompleksinių skaičių išsidėstymu plokštumoje. Tam reikalui labai pravartu prisiminti, kad atstumas nuo taško z iki w lygus atstumui nuo O iki $z-w$, t. y. lygus $|z-w|$.

1. *Kokią figūrą sudaro kompleksiniai skaičiai z, kai* $|z|=3$? Atsakymas į šį klausimą išplaukia tiesiog iš modulio apibrėžimo: tie kompleksiniai skaičiai sudaro apskritimą, kurio spindulys lygus 3, o centras sutampa su koordinačių pradžia.

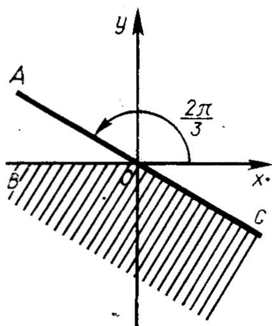
2. *Kokią figūrą sudaro kompleksiniai skaičiai z, kai*

$$|z-2+i|\geqslant 5?$$

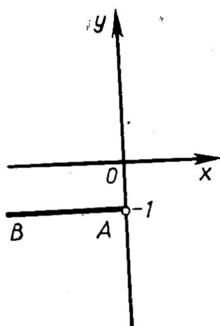
Kadangi $|z-2+i|=|z-(2-i)|$, tai ieškomųjų taškų atstumas nuo taško $2-i$ didesnis už 5 arba lygus 5. Tai reiškia, kad tie taškai yra už apskritimo, kurio spindulys lygus 5, o centras sutampa su tašku $(2,\ -1)$, arba priklauso tam apskritimui.

3. *Kokią figūrą sudaro kompleksiniai skaičiai z, kai*

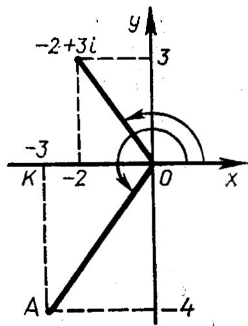
$$|z-1|=|z-i|?$$



7 pav.



8 pav.



9 pav.

Šita lygybė rodo, kad taškas z yra vienodai nutolęs nuo taškų 1 ir i. Todėl tas taškas priklauso atkarpos, jungiančios taškus 1 ir i, vidurio statmeniui. Vadinasi, ieškomieji taškai z sudaro pirmo ir trečio koordinatinių kampų pusiaukampines.

4. *Kokias figūras sudaro kompleksiniai skaičiai z, kai*

a) $\arg z = \frac{2\pi}{3}$; b) $\pi < \arg z < \frac{5\pi}{3}$; c) $\arg(z+i) = \pi$?

Atsakymas į klausimą a) išplaukia tiesiog iš pagrindinio argumento apibrėžimo: tie taškai sudaro spindulį OA, kuris su teigiamąja abscisių ašies kryptimi sudaro kampą $\frac{2\pi}{3}$. Panašiai įsitikiname, kad atveju b) taškai sudaro kampą tarp spindulių OB ir OC (7 pav.).

Atsakydami į klausimą c), pastebėsime, kad taškai $w = z + i$ sudaro neigiamąjį abscisių ašies spindulį (be taško O), o taškas z gaunamas iš w, pastūmus jį atstumu, lygiu 1, žemyn. Vadinasi, ieškomieji taškai sudaro spindulį AB be taško A (8 pav.).

Natūralu kelti klausimą, kaip rasti turimo kompleksinio skaičiaus modulį ir argumentą. Kaip apskaičiuoti modulį, paaiškinti nesunku: pagal apibrėžimą skaičiaus $z = a + bi$ modulis lygus stačiojo trikampio OAK (žr. 6 pav.) įžambinės ilgiui, kai statinių ilgiai lygūs $|a|$ ir $|b|$. Todėl

$$|z| = |OA| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3}$$

Ieškodami skaičiaus $z = a + bi$ pagrindinio argumento, turime prisiminti, kad pagal kosinuso ir sinuso apibrėžimus galima parašyti lygybes (žr. 6 pav.)

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{4}$$

iš kurių ir galima rasti kampą α.

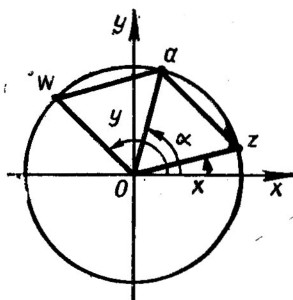
Deja, iš (4) lygybių neįmanoma išvesti patogios formulės, išreiškiančios kampą α skaičiais a ir b. Šiaip ar taip α gali nesutapti nei su $\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, nei su $\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$: jei, pavyzdžiui, skaičius z priklauso trečiam ketvirčiui, tai jo pagrindinis argumentas yra didesnis už π, tuo tarpu arksinuso ir arkkosinuso reikšmės negali būti didesnės už π.

Todėl konkretaus kompleksinio skaičiaus pagrindinis argumentas dažniausiai randamas ne pagal formules, o pavaizdavus skaičių geometriškai. Pavyzdžiui, ieškodami skaičiaus $-2+3i$ pagrindinio argumento, pastebime, kad jis yra tarp 0 ir π (9 pav.), todėl šį argumentą galima išreikšti arkkosinusu: $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. Skaičiaus $-3-4i$ pagrindinis argumentas didesnis už π; lengva įsitikinti, kad jį galima išreikšti suma $\pi + \widehat{AOK} = \pi + \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

Dabar išspręsime vieną iš tų uždavinių, kuriuos suformulavome 1 paragrafe.

Uždavinys. *Išspręskite lygčių sistemą*

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin \alpha, \\ \cos x + \cos y = \cos \alpha. \end{cases}$$



10 pav.

Padauginę pirmąją lygtį iš i ir sudėję su antrąja, gauname lygybę

$$(\cos x + i \sin x) + (\cos y + i \sin y) = \\ = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Ši lygybė ekvivalenti duotajai sistemai.

Jei tarsime, kad $z = \cos x + i \sin x$, $w = \cos y + i \sin y$ ir $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$, tai gautąją lygybę galėsime parašyti trumpai: $z + w = a$. Remdamiesi (3) formule, įsitikiname, kad $|z| = |w| = |a| = 1$, t. y., kad taškai z, w ir a priklauso vienetiniam apskritimui. Vadinasi, lygiagretainis $Ozaw$ (10 pav.) yra rombas, kurio įstrižainės ilgis lygus kraštinės ilgiui; o tai reiškia, kampų aOz ir aOw didumas lygus $\frac{\pi}{3}$.

Kitaip sakant, arba $\alpha - x = \frac{\pi}{3} - 2k\pi$, $y - \alpha = \frac{\pi}{3} + 2l\pi$ (paveiksle toks atvejis pavaizduotas), arba $\alpha - x = -\frac{\pi}{3} - 2k\pi$, $y - \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$ (k, $l \in \mathbf{Z}$). Iš čia gauname sistemos sprendinius:

$x=\alpha-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $y=\alpha+\frac{\pi}{3}+2l\pi$ ir $x=\alpha+\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $y=\alpha-\frac{\pi}{3}+2l\pi$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$.

Pratimai

39. Pavaizduokite plokštumoje skaičius $1+i$, $2-3i$, $-1-2i$, $7-5i$.

40. Kokią figūrą sudaro taškai, vaizduojantys kompleksinius skaičius $z=t+(1-t)i$, kai t — realus skaičius?

41. Pavaizduokite plokštumoje visus kompleksinius skaičius z, kuriuos atitinka realios reiškinio $(1+i)z$ reikšmės.

42. Atkarpos galai vaizduoja skaičius z ir w. Kokį skaičių vaizduoja tos atkarpos vidurys?

43. Taškai z_1, z_2 ir z_3 yra trikampio viršūnės. Koks kompleksinis skaičius atitinka to trikampio centroidą?

44. Taškai z_1, z_2 ir z_3 yra lygiagretainio viršūnės. Raskite ketvirtą viršūnę.

45. Pavaizduokite plokštumoje taškų aibes, išreiškiamas šiais sąryšiais:

a) $1<|z-1|<2$;
b) $|z+1-i|>|z+i|$;
c) $|2z-i|=4$;
d) $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}$;
e) $\operatorname{Im} z=1$;
f) $2\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=1$;
g) $\operatorname{Re}(iz+2-i)=2$;
h) $1<\operatorname{Re} z<2$;
i) $0<\operatorname{Im} z<1$;
k) $\operatorname{Im}(1+i)z=1$;
l) $\arg z=\frac{7\pi}{4}$;
m) $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{2\pi}{3}$;
n) $\frac{\pi}{6}<\arg(z+1)<\frac{\pi}{4}$;
o) $\arg(iz-1)=\frac{\pi}{3}$;
p) $|2z-i|=|2z+1|$;
r) $|(1+i)z-i|=1$.

46. Įrodykite, kad trys skirtingi taškai z_1, z_2 ir z_3 priklauso vienai tiesei tada ir tik tada, kai $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ yra realus skaičius.

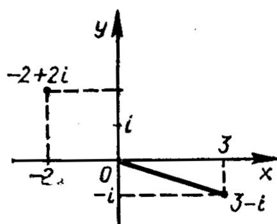
Kompleksinio skaičiaus trigonometrinė forma. Su modulio ir argumento sąvokomis siejasi dar vienas svarbus kompleksinių skaičių užrašymo būdas — vadinamoji trigonometrinė forma. Jei r yra kompleksinio skaičiaus $z=a+bi\neq0$ modulis, o α — kuris nors to skaičiaus argumentas, tai iš (2) lygybių gauname

$$z=r\cos\alpha+ir\cos\alpha=r(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Vadinasi, bet kurį nelygų nuliui kompleksinį skaičių z galima išreikšti formule

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

kurioje r — skaičiaus z modulis, o α — kuris nors jo argumentas (nebūtinai pagrindinis).



11 pav.

Šitas kompleksinio skaičiaus užrašas vadinamas jo trigonometrine išraiška, arba tiesiog jo *trigonometrine forma*. Tokia forma galima išreikšti kiekvieną nelygų nuliui kompleksinį skaičių; kompleksinio skaičiaus 0, žinoma, trigonometrine forma išreikšti neįmanoma, nes jis neturi argumento.

Pradinė kompleksinio skaičiaus išraiška $a+bi$ dažniausiai vadinama *algebrine forma*. Sprendžiant kai kuriuos uždavinius, susijusius su kompleksiniais skaičiais, dažnai reikia vieną tų formų pakeisti kita. „Viena kryptimi" tai padaroma lengvai: jei skaičius z išreikštas trigonometrine forma $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, tai

$$z = r\cos\varphi + i(r\sin\varphi)$$

yra jo algebrinė forma.

Dar apie atvirkštinį keitimą, t. y. algebrinės formos keitimą trigonometrine. Kaip sakėme, nėra patogios bendros formulės kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ argumentui rasti. Todėl praktikoje dažniausiai remiamės geometriniu brėžiniu.

Pavyzdžiui, naudodamiesi 11 paveikslu, galime parašyti šias lygybes

$$1 = \cos 0 + i\sin 0, \quad i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi), \quad -2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$3-i = \sqrt{10}\left(\cos\left(2\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right).$$

Tos lygybės yra atitinkamų kompleksinių skaičių išraiškos trigonometrinė forma. Atkreipkime dėmesį, kad, pavyzdžiui, paskutinį skaičių galima užrašyti dar dviem būdais:

$$3-i = \sqrt{10}\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) + i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right),$$

$$3-i = \sqrt{10}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) - i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right),$$

bet paskutinė išraiška nebus to skaičiaus trigonometrinė forma.

Naudojantis trigonometrine forma, galima vaizdžiai paaiškinti kompleksinių skaičių daugybą ir dalybą. Sakykime, kompleksiniai skaičiai z ir w išreikšti trigonometrine forma:

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),\quad w=s(\cos\beta+i\sin\beta).$$

Apskaičiuokime jų sandaugą:

$$zw=rs(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$=rs((\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta))=$$
$$=rs(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)).$$

Iš čia matyti, kad *kompleksinių skaičių sandaugos modulis lygus jų modulių sandaugai:*

$$|zw|=|z|\cdot|w|, \tag{5}$$

o dauginamųjų skaičių argumentų suma yra sandaugos argumentas.

Savaime aišku, kad pagrindinių argumentų suma, apskritai kalbant, nėra sandaugos pagrindinis argumentas: taip bus tik tuo atveju, kai dauginamųjų skaičių pagrindinių argumentų suma yra mažesnė už 2π.

Iš (5) formulės išplaukia įdomi išvada, kuri pati nėra susijusi su kompleksiniais skaičiais. Būtent, jei $z=a+bi$, $w=c+di$, tai

$$|z|^2=a^2+b^2,\quad |w|^2=c^2+d^2,$$
$$|zw|^2=|(a+bi)(c+di)|^2=|(ac-bd)+(ad+bc)i|^2=$$
$$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2,$$

todėl, abi puses pakėlę kvadratu, iš (5) lygybės gausime

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2. \tag{6}$$

Šita lygybė teisinga, kai a, b, c ir d — bet kokie realieji skaičiai.

Kai a, b, c ir d yra sveiki skaičiai, iš (6) lygybės išplaukia tokia išvada: *jei kiekvieną iš dviejų duotų skaičių galima išreikšti dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma, tai tų skaičių sandauga irgi yra dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma.*

Savaime aišku, kad šita išvada pritaikoma ir tam atvejui, kai sandaugą sudaro bet kiek dauginamųjų.

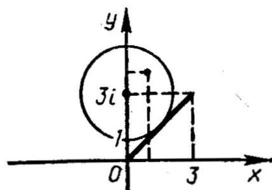
Ta išvada padės mums išspręsti 6 uždavinį, suformuluotą 1 paragrafe.

Apskritimo spindulys lygus $65\sqrt{5}$, *o centras sutampa su koordinačių pradžia. Ar tame apskritime yra taškų, kurių koordinatės — sveikieji skaičiai?*

Šiuo atveju reikia išsiaiškinti, ar skaičių $21\,125=65^2\cdot 5$ galima išreikšti sveikųjų skaičių x ir y kvadratų suma:

$$x^2+y^2=21\,125.$$

Kadangi $21.125=5^3\cdot 13^2$, tai, norint atsakyti į klausimą, užtenka pastebėti, kad skaičiùs 5 ir 13 galima išreikšti dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma. Tuomet, remdamiesi išvada, galime tvirtinti, kad bet kurią sandaugą, sudarytą iš dauginamųjų 5 ir 13, taip pat galima išreikšti dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma.



12 pav.

Vadinasi, dauginant kompleksinius skaičius, jų modulius reikia sudauginti, o argumentus sudėti. Tai leidžia daugybos operaciją interpretuoti šitaip: norint pavaizduoti sandaugą zw, reikia tašką z pasukti apie tašką O kampu $\arg w$ ir gautą tašką atvaizduoti homotetija su centru O ir koeficientu $|w|$.

5. *Kokią figūrą sudaro kompleksiniai skaičiai* w, *kai* $w=(1-i)z-2+i$ ir $|z-3i|=2$?

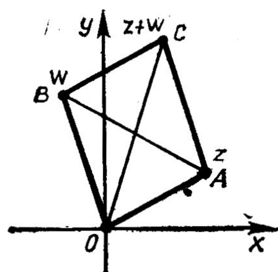
Jau žinome, kad skaičiai, tenkinantys paskutinę lygybę, sudaro apskritimą C, kurio spindulys lygus 2, o centras sutampa su tašku $3i$ (12 pav.). Skaičiai $(1-i)z$ gaunami iš skaičių z, pasukus juos kampu $\arg(1-i)=\frac{7\pi}{4}$ ir pritaikius homotetiją $H_O^{\sqrt{2}}$. Tuomet apskritimas C bus atvaizduotas į apskritimą C_1, kurio spindulys lygus $2\sqrt{2}$, o centras — taškas $(1-i)3i=3+3i$.

Vadinasi, taškai $w=(1-i)z-2+i$ sudaro spindulio $2\sqrt{2}$ apskritimą C_1, kurio centras — taškas $1+4i$.

Šis konkretus pavyzdys pakankamai aiškiai parodo, kad ir bendruoju atveju, kai taškai z sudaro apskritimą, taškai $az+b$ $(a\neq 0)$ irgi sudaro apskritimą.

Galima sakyti ir kitaip: tiesinė *kompleksinio kintamojo funkcija* $z\to az+b$, kai $a\neq 0$, kiekvieną apskritimą atvaizduoja į apskritimą. Šį teiginį bendruoju atveju galima įrodyti be jokio skaičiavimo, samprotaujant grynai geometriškai: apskritimas atvaizduojamas į apskritimą ir posūkiu $R_O^{\arg a}$, ir homotetija $H_O^{|a|}$, ir lygiagrečiuoju postūmiu $\overrightarrow{Ob}$. Tokiu pat samprotavimu įsitikiname, kad tiesinė funkcija $z\to az+b$ $(a\neq 0)$ kiekvieną tiesę atvaizduoja į tiesę.

Kompleksinių skaičių dalybą interpretuodami geometriškai, remsimės tapatybe $\frac{z}{w}\cdot w=z$, iš kurios lengva įsitikinti, kad



13 pav.

dviejų kompleksinių skaičių dalmens modulis lygus jų modulių dalmeniui, o argumentų skirtumas yra dalmens argumentas.

Iš aptartų kompleksinio skaičiaus modulio savybių ir vieno naujo teiginio sudarysime bendrą teoremą.

T e o r e m a. ***Jei z ir w yra bet kurie kompleksiniai skaičiai, tai***

1) $|zw|=|z|\cdot|w|$,

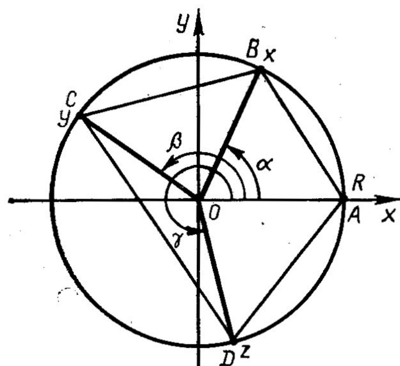
2) $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ $(w\neq 0)$,

3) $|z|-|w|\leqslant|z+w|\leqslant|z|+|w|$,

4) $|z-w|$ ***lygus atstumui nuo taško z iki w.***

Iš tų teiginių mums naujas yra tik 3) nelygybėmis išreikštas teiginys. Jo neįrodinėsime, tik paaiškinsime geometriškai: jis reiškia, kad lygiagretainio $OACB$ (13 pav.) įstrižainės OC ilgis yra mažesnis už kraštinių OA ir OB ilgių sumą ir didesnis už tų pačių ilgių skirtumą. Be to, lygumo ženklą galima rašyti tik tuo atveju, kai taškai O, z ir w priklauso vienai tiesei, t. y. kai lygiagretainis $OACB$ yra „išsigimęs".

P t o l e m ė j o   t e o r e m a. Dabar galime įrodyti Ptolemėjo teoremą, kurią 1 paragrafe pateikėme kaip 7 uždavinį. Naudodami kompleksinius skaičius, to geometrinio teiginio įrodymą galėsime pakeisti elementarios trigonometrinės tapatybės patikrinimu.



14 pav.

P t o l e m ė j o   t e o r e m a. ***Įbrėžtinio keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių sandaugų suma lygi įstrižainių ilgių sandaugai.***

Į r o d y m a s. Sakykime, keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į spindulio R apskritimą, kurio centras — taškas O (14 pav.).

Centrą O laikysime koordinačių pradžia, o spindulį OA — teigiamuoju abscisių ašies spinduliu.

Tarkime, kad taškai B, C ir D vaizduoja kompleksinius skaičius x, y ir z, kurių moduliai lygūs R, o pagrindiniai argumentai — atitinkamai α, β ir γ. Viršūnė A bus kompleksinis skaičius R.

Reikia įrodyti, kad teisinga tokia lygybė:

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|,$$

kurią dabar galima užrašyti šitaip:

$$|x-R| \cdot |y-z| + |z-R| \cdot |y-x| = |y-R| \cdot |z-x|. \quad (7)$$

Tačiau

$$|x-R| = |R(\cos\alpha + i\sin\alpha) - R| = R|(\cos\alpha - 1) + i\sin\alpha| =$$

$$= R\sqrt{(\cos\alpha-1)^2 + \sin^2\alpha} = R\sqrt{2-2\cos\alpha} = 2R\sin\frac{\alpha}{2},$$

ir analogiškai

$$|y-R| = 2R\sin\frac{\beta}{2}, \quad |z-R| = 2R\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Be to,

$$|y-z| = \left|z\left(\frac{y}{z} - 1\right)\right| = |z| \cdot \left|\frac{\cos\beta + i\sin\beta}{\cos\gamma + i\sin\gamma} - 1\right| =$$

$$= R|\cos(\beta-\gamma) + i\sin(\beta-\gamma) - 1| = 2R\sin\frac{\gamma-\beta}{2},$$

$$|y-x| = 2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}, \quad |z-x| = 2R\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Dabar iš (7) lygybės gauname naują lygybę

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2},$$

kurią įrodant užtenka pritaikyti skirtumo sinuso formulę:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) +$$

$$+ \sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\beta}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Tuo ir baigiamas teoremos įrodymas.

Jungtiniai skaičiai. Susipažinsime dar su viena svarbia kompleksinių skaičių teorijos sąvoka.

Apibrėžimas. *Kompleksinio skaičiaus $z = a + bi$ jungtiniu skaičiumi vadinamas skaičius $a - bi$.*

Skaičius, jungtinis skaičiui z, žymimas $\bar{z}$. Savaime aišku, kad skaičiai z ir $\bar{z}$ vaizduojami taškais, simetriškais abscisių ašies atžvilgiu. Todėl

$$|\bar{z}|=|z|, \arg\bar{z}=2\pi-\arg z.$$

Lengva patikrinti, kad bet kurio skaičiaus $z=a+bi$ ir jo jungtinio skaičiaus $\bar{z}=a-bi$ suma bei sandauga yra realūs skaičiai:

$$z+\bar{z}=2a, \quad z\cdot\bar{z}=a^2+b^2.$$

Kai skaičius z yra menamas, teisingas ir atvirkščias teiginys: jei $z+w$ ir zw yra realūs skaičiai ir $\operatorname{Im} z\neq 0$, tai $w=\bar{z}$. Įrodymo nepateiksime, bet pabrėšime, kad sąlyga $\operatorname{Im} z\neq 0$ šiuo atveju yra esminė.

Parodysime, kaip jungtiniai skaičiai padeda atlikti dalybos operaciją: $\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\bar{w}}{w\cdot\bar{w}}=\frac{z\cdot\bar{w}}{|w|^2}$, t. y. dalyba pakeičiama daugyba.

Jungtinių kompleksinių skaičių savybes nusakysime bendra teorema.

Teorema. ***Jei z ir w yra bet kurie kompleksiniai skaičiai, tai***

1) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$; $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$;

2) $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$; $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ $(w\neq 0)$;

3) $\bar{\bar{z}}=z$;

4) $z\bar{z}=|z|^2$;

5) $\bar{z}=z$ ***tada ir tik tada, kai*** z ***— realus skaičius;***

6) $\bar{z}=-z$ ***tada ir tik tada, kai*** z ***— grynai menamas skaičius.***

Šios teoremos įrodymas nėra sunkus, todėl siūlome skaitytojui ją įrodyti savarankiškai. Tik atkreipiame dėmesį į tai, kad, įrodant antrąją lygybę, parašytą 2) eilutėje, pravartu, kaip ir anksčiau, remtis tapatybe $\frac{z}{w}\cdot w=z$.

Matematinės indukcijos metodu galima įrodyti, kad 1) bei 2) taisyklės pritaikomos sumai (sandaugai), kurią sudaro bet kiek dėmenų (dauginamųjų).

Tuo faktu remsimės, iš teoremos išvesdami teiginį, kuris labai svarbus daugianarių su realiais koeficientais teorijai.

Išvada. *Jei $f(x)$ yra daugianaris su realiais koeficientais, o z — kompleksinis skaičius, tai*

$$\overline{f(z)}=f(\bar{z}).$$

Atskiru atveju, kai a yra daugianario $f(x)$ šaknis, skaičius $\bar{a}$ irgi yra to daugianario šaknis.

Iš tikrųjų, jei daugianario

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

koeficientai yra realūs skaičiai, tai

$$\bar{a}_0=a_0,\ \bar{a}_1=a_1,\ \ldots,\ \bar{a}_{n-1}=a_{n-1},\ \bar{a}_n=a_n.$$

Tokiu atveju

$$\overline{f(z)}=\overline{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n}=$$
$$=\overline{a_0z^n}+\overline{a_1z^{n-1}}+\ldots+\overline{a_{n-1}z}+\bar{a}_n=$$
$$=\bar{a}_0\bar{z}^n+\bar{a}_1\bar{z}^{n-1}+\ldots+\bar{a}_{n-1}\bar{z}+\bar{a}_n=$$
$$=a_0\bar{z}^n+a_1\bar{z}^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\bar{z}+a_n=f(\bar{z}).$$

Jeigu a yra daugianario $f(x)$ šaknis, t. y. $f(a)=0$, tai $f(\bar{a})=\overline{f(a)}=\bar{0}=0$. Todėl $\bar{a}$ irgi yra daugianario $f(x)$ šaknis.

Pratimai

47. Išreikškite trigonometrine forma šiuos skaičius:

a) 1; f) $-1+i\sqrt{3}$; l) $3-4i$;

b) -1; g) $1+i\sqrt{3}$; m) $-3+4i$;

c) i; h) $-1-i\sqrt{3}$; n) $-3-4i$;

d) $-i$; i) $1-i\sqrt{3}$; o) $\sin\alpha+i\cos\alpha$;

e) $1+i$; k) $3+4i$; p) $1+i\operatorname{tg}\alpha$.

48. Suprastinkite reiškinius:

a) $(1-i\sqrt{3})^6$; c) $(\sin\alpha+i\cos\alpha)^3$;

b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$; d) $(\sin\beta+i\cos\beta)(1+i\operatorname{tg}\alpha)$.

49. Apskaičiuokite:

a) $(1+i)^n$; b) $\left(\frac{1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2$.

50. Raskite z, kai $\bar{z}+2=2iz$.

51. Raskite natūrinius skaičius n, su kuriais teisinga lygybė

$$(1+i)^n=(1-i)^n.$$

52. Kokią figūrą sudaro kompleksiniai skaičiai $w=(1+i)z-i$, kai $|z+3i|=1$?

53. Raskite bent vieną lygties $x^2+y^2=32\,045$ natūrinį sprendinį.

54. Raskite kompleksinius skaičius z_1 ir z_2, su kuriais teisingos šios lygybės:

a) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$;
b) $|z_1+z_2|=|z_1|-|z_2|$;
c) $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$.

55. Įrodykite tapatybę $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ ir paaiškinkite jos geometrinę prasmę.

56. Jei keturkampio kraštinių ilgių kvadratų suma lygi jo įstrižainių ilgių kvadratų sumai, tai tas keturkampis yra lygiagretainis. Įrodykite.

57. Nurodykite plokštumos taškus z, susietus šiomis priklausomybėmis:

a) $\bar{z}=\frac{1}{z}$; e) $\operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1}=0$;
b) $z=1+i-\bar{z}$; f) $\operatorname{Re} z<\frac{1}{2}$;
c) $\bar{z}=\frac{1}{-z}$; g) $\arg\frac{1}{z}=\frac{\pi}{4}$;
d) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}=1$; h) $|z-1|=2|z|$.

3. Kompleksinių skaičių laipsniai ir šaknys. Kompleksinio skaičiaus laipsnis su sveikuoju rodikliu apibrėžiamas visiškai panašiai, kaip ir toks pat realiojo skaičiaus laipsnis, todėl to apibrėžimo čia nepateiksime. Be to, laipsnių pertvarkymo formulės kompleksinių skaičių aibėje nesikeičia. O šaknies apibrėžimą pasakysime, norėdami pabrėžti, kad logiškai gali egzistuoti keletas nurodyto laipsnio šaknų iš turimo kompleksinio skaičiaus. Būtent, *n-tojo* ($n\in\mathbf{N}$) *laipsnio šaknimi* iš kompleksinio skaičiaus z vadinamas kiekvienas toks skaičius w, kad $w^n=z$. Toliau pamatysime, kad su šaknimis kompleksinių skaičių aibėje yra visiškai kitaip negu realiųjų skaičių aibėje: n-tojo laipsnio šaknų iš kiekvieno nelygaus nuliui kompleksinio skaičiaus yra lygiai n.

Muavro formulė. Keldami laipsniu ir traukdami šaknis, kompleksinius skaičius reikšime trigonometrine forma.

Praeitame skyrelyje įsitikinome, kad, dauginant kompleksinius skaičius, reikia sudauginti jų modulius ir sudėti argumentus. Savaime aišku, kad šią taisyklę galima taikyti ir tada, kai dauginamųjų yra daugiau negu du. Vadinasi, bet kurio kompleksinio skaičiaus

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

laipsnio z^n ($n \in \mathbf{N}$) modulis bus lygus r^n, o argumentas — lygus $n\alpha$:

$$z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Išvestoji formulė teisinga ir tada, kai n yra sveikas neigiamas skaičius. Iš tikrųjų, jei $n = -m$ ir $m \in \mathbf{N}$, tai, atsižvelgę į tai, kad $\arg 1 = 0$, gauname

$$z^n = (r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^{-m} = \frac{1}{(r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^m} =$$

$$= \frac{1}{r^m (\cos m\alpha + i \sin m\alpha)} = r^{-m} (\cos(-m\alpha) + i \sin(-m\alpha)) =$$

$$= r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Išvestoji kompleksinių skaičių kėlimo laipsniu formulė

$$(r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \quad (n \in \mathbf{Z})$$

vadinama *Muavro formule.* Ji plačiai taikoma teorijoje; pavyzdžiui, ja remsimės, traukdami šaknis iš kompleksinių skaičių. Išnagrinėsime keletą uždavinių, kuriuos sprendžiant taikoma Muavro formulė.

1. *Apskaičiuokite* $(1 - i\sqrt{3})^{1980}$.

Laipsnio pagrindą išreikškime trigonometrine forma:

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Tuomet pagal Muavro formulę

$$(1 - i\sqrt{3})^{1980} = 2^{1980} (\cos(-660\pi) + i \sin(-660\pi)) = 2^{1980}.$$

2. *Apskaičiuokite reiškinį*

$$\left(\frac{\cos 20° + i \sin 20°}{\cos 20° - i \sin 20°}\right)^{20}.$$

Kadangi

$$\frac{\cos 20° + i \sin 20°}{\cos 20° - i \sin 20°} = \frac{\cos 20° + i \sin 20°}{\cos(-20°) + i \sin(-20°)} = \cos 40° + i \sin 40°,$$

tai

$$(\cos 40° + i \sin 40°)^{20} = \cos 800° + i \sin 800° =$$

$$= \cos 80° + i \sin 80°.$$

3. *Apskaičiuokite* $(1 - \cos \alpha - i \sin \alpha)^n$ ($n \in \mathbf{Z}$).

Kadangi

$$1 - \cos \alpha - i \sin \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} - i \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + i \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\right),$$

tai

$$(1-\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=2^n\sin^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos n\frac{3\pi+\alpha}{2}+i\sin n\frac{3\pi+\alpha}{2}\right).$$

Atkreipkime dėmesį, kad paskutinį veiksmą atlikome ne visiškai pagal Muavro formulę, nes negalime tvirtinti, kad $2\sin\frac{\alpha}{2}$ yra skaičiaus $1-\cos\alpha-i\sin\alpha$ modulis: juk $\sin\frac{\alpha}{2}$ gali būti ir neigiamas. Vis dėlto nesunku įsitikinti, kad *Muavro formulė teisinga ir tuomet, kai skaičius r yra neigiamas.* Tai įrodant, užtenka remtis laipsnio savybe $(zw)^n=z^n w^n$.

4. *Apskaičiuokite šias dvi sumas:*

a) $S_1=\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi$,

b) $S_2=\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi$ $(\varphi\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z})$.

Abi šitas sumas apskaičiuokime kartu. Jei kompleksinį skaičių $\cos\varphi+i\sin\varphi$ žymime raide z, tai

$$S_1+iS_2=(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+$$
$$+\ldots+(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=z+z^2+\ldots+z^n=z\,\frac{z^n-1}{z-1}.$$

Paskutiniam pertvarkymui pritaikėme geometrinės progresijos n narių sumos formulę, kuri, aišku, teisinga ir kompleksinių skaičių aibėje. Įsitikinome, kad suma S_1 yra reiškinio $z\,\frac{z^n-1}{z-1}$ realioji dalis, o S_2 — jo menamoji dalis. Todėl, norint apskaičiuoti tas sumas, reikia reiškinį parašyti algebrine forma. Skaičiuojame panašiai, kaip spręsdami 3 pavyzdį:

$$\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{\cos n\varphi+i\sin n\varphi-1}{\cos\varphi+i\sin\varphi-1}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{n\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{n\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{n\varphi}{2}\right)\right)}{2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{n-1}{2}\varphi+i\sin\frac{n-1}{2}\varphi\right),$$

todėl

$$z\,\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{n+1}{2}\varphi+i\sin\frac{n+1}{2}\varphi\right).$$

Vadinasi,

$$S_1=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},\quad S_2=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

5. *Įrodykite, kad* $\cos n\alpha$ $(n\in\mathbf{N})$ *galima išreikšti kintamojo* $\cos\alpha$ *daugianariu su sveikais koeficientais.*

Pirmiausia atkreipiame dėmesį į tai, kad $\cos 2\alpha$ ir $\cos 3\alpha$ iš tikrųjų yra kintamojo $\cos\alpha$ daugianariai:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Imkime kompleksinį skaičių $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$. Viena vertus, pagal Muavro formulę

$$z^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha,$$

ir todėl $\cos n\alpha=\operatorname{Re} z^n$.

Antra vertus,

$$z^n=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ldots(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Sudauginę dešinėje pusėje parašytuosius dvinarius, gausime sumą, kurios dėmenys yra $a_k=\cos^k\alpha(i\sin\alpha)^{n-k}$ pavidalo. Toks dėmuo bus realus skaičius tik tuo atveju, kai $n-k$ yra lyginis skaičius $2m$, būtent, tokiu atveju

$$a_k=\pm\cos^k\alpha(1-\cos^2\alpha)^m.$$

Lengva įsitikinti, kad a_k yra kintamojo $\cos\alpha$ daugianaris su sveikais koeficientais. Todėl $\operatorname{Re} z^n$, kaip tokių daugianarių suma, irgi yra $\cos\alpha$ daugianaris su sveikais koeoficientais. Tai ir reikėjo įrodyti.

6. *Įrodykite, kad* $\cos 31°$ *yra iracionalus skaičius.*

Tarkime priešingai: $\cos 31°\in\mathbf{Q}$. Tuomet, remdamiesi 5 pavyzdžio teiginiu, įsitikiname, kad $\cos 310°=\cos(10\cdot 31°)=f(\cos 31°)$ irgi yra racionalus skaičius, nes daugianario $f(x)$ koeficientai yra sveiki skaičiai. Iš to aišku, kad $\cos 50°=\cos 310°\in\mathbf{Q}$. Panašiai samprotaudami, įsitikiname, kad $\cos 150°\in\mathbf{Q}$, o tai, savaime aišku, netiesa. Gauta prieštara rodo, kad $\cos 31°$ — iracionalus skaičius.

Pratimai

58. Apskaičiuokite:

a) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{1980}$; c) $(\operatorname{tg} 17°+i)^{1980}$;

b) $(\sqrt{3}+i)^{20}$; d) $(1+i\operatorname{tg} 1°)^{20}$.

59. Suprastinkite reiškinius:

a) $(\operatorname{tg}\alpha+i)^n$;

b) $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$;

c) $(\sin\alpha+i\cos\alpha+1)^n$.

60. Apskaičiuokite $z^n+\frac{1}{z^n}$, kai $z+\frac{1}{z}=1$.

61. Įrodykite, kad $\sin n\alpha$, kai n — nelyginis skaičius, galima išreikšti kintamojo $\sin\alpha$ daugianariu su sveikais koeficientais.

62. Įrodykite, kad $\cos 1°$ ir $\sin 1°$ yra iracionalūs skaičiai.

63. Apskaičiuokite sumas:

a) $\sin x+a\sin 2x+a^2\sin 3x+\ldots+a^{n-1}\sin nx$;

b) $\cos x+a\cos 2x+a^2\cos 3x+\ldots+a^{n-1}\cos nx$;

c) $C_n^1\sin x+C_n^2\sin 2x+\ldots+C_n^n\sin nx$.

64. Išreikškite $\operatorname{tg}5\alpha$ kampo α tangentu ($\operatorname{tg}\alpha$).

65. Pavaizduokite plokštumoje taškus z, kai

a) $\operatorname{Re} z^6>\operatorname{Im} z^6$; b) $|\operatorname{Im} z^2|\leqslant 2$.

Šaknų traukimas. Tarkime, kad z — nelygus nuliui kompleksinis skaičius, o w — jo n-tojo laipsnio šaknis. Tuomet pagal šaknies apibrėžimą bus teisinga tokia lygybė:

$$w^n=z. \tag{8}$$

Jei $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $w=s(\cos\beta+i\sin\beta)$, tai (8) lygybę, remdamiesi Muavro formule, galime parašyti šitaip:

$$s^n(\cos n\beta+i\sin n\beta)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Čia skaičius z išreikštas dviem būdais trigonometrine forma. Abiem atvejais skaičiaus z modulis, be abejo, yra tas pats, o argumentai gali skirtis skaičiumi $2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$). Todėl

$$s^n=r,\quad n\beta-\alpha=2k\pi\quad (k\in\mathbf{Z}),$$

o iš čia

$$s=\sqrt[n]{r},\quad \beta=\frac{\alpha+2k\pi}{n}\quad (k\in\mathbf{Z}).$$

Vadinasi, kiekviena n-tojo laipsnio šaknis iš z išreiškiama šitaip:

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\quad (k\in\mathbf{Z}). \tag{9}$$

Iš Muavro formulės išplaukia ir atvirkščias teiginys: visi skaičiai w_k yra n-tojo laipsnio šaknys iš z. Vadinasi, (9) formulė nusako visą šaknų iš z aibę.

Vis dėlto negali nekelti abejonių tas faktas, kad (8) algebrinė n-tojo laipsnio lygtis su nežinomuoju w turi ... be galo daug šaknų. Tačiau paaiškėja, kad (9) pavidalo skaičių aibė tik iš pažiūros atrodo begalinė, o iš tikrųjų ji turi tik n skirtingų elementų.

Norėdami tuo įsitikinti, pirma įrodysime, kad skaičiai

$$w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \tag{10}$$

yra skirtingi. Jei k ir l yra sveikieji skaičiai, nemažesni už 0 ir nedidesni už $n-1$, ir, sakysime, $k>l$, tai skaičių w_k ir w_l argumentų β_k ir β_l skirtumas

$$\beta_k-\beta_l=\frac{\alpha+2k\pi}{n}-\frac{\alpha+2l\pi}{n}=2\pi\frac{k-l}{n}.$$

yra tarp 0 ir 2π. Vadinasi, β_k ir β_l skirtumas nėra lygus skaičiui $2n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$. Todėl $w_k\neq w_l$.

Jei w_k yra bet kuris (9) aibės skaičius, tai, skaičių k padalijęs iš n su liekana, gauname $k=nq+p$. Todėl

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi nq+2\pi p}{n}+i\sin\frac{\alpha+2\pi nq+2\pi p}{n}\right)=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi p}{n}+i\sin\frac{\alpha+2\pi p}{n}\right)=w_p.$$

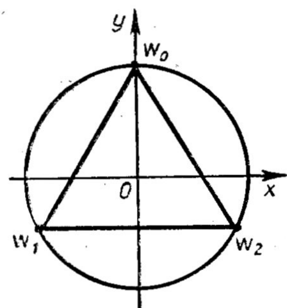
Tačiau skaičius p pagal liekanos apibrėžimą tenkina nelygybę $0\leqslant p<n$, o tai reiškia, kad skaičius w_p priklauso (10) aibei. Vadinasi, kiekvienas (9) aibės skaičius w_k iš tikrųjų priklauso (10) aibei. Tai reiškia, kad (9) formule nusakoma kompleksinių skaičių aibė sutampa su (10) aibe, t. y. abi nusako n-tojo laipsnio šaknų iš skaičiaus z aibę.

Kalbėdami apie realiuosius skaičius, galėjome natūraliai apibrėžti aritmetinės šaknies sąvoką, t. y. išskirti teigiamąją šaknį iš turimo teigiamo skaičiaus. Kompleksinių skaičių aibėje visos n-tojo laipsnio šaknys yra „lygiateisės“, todėl nėra specialaus ženklo kokiai nors „ypatingai“ šakniai žymėti.

Simboliu $\sqrt[n]{z}$ dažnai žymima visa n-tojo laipsnio šaknų iš skaičiaus z aibė. Vadinasi, samprotavimą galima apibendrinti šitaip: jei $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, tai

$$\sqrt[n]{z}=\left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)0\leqslant k<n\right\}. \tag{11}$$

Be to, natūralu susitarti, kad $\sqrt[n]{0}=0$.



15 pav.

Kaip pavyzdį apskaičiuosime visas kubines šaknis iš $-i$. Kadangi

$$-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2},$$

tai aibę $\sqrt[3]{-i}$ sudaro skaičiai

$$w_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)=$$
$$=\cos\frac{4k+3}{6}\pi+i\sin\frac{4k+3}{6}\pi\quad(0\leqslant k\leqslant 2).$$

Gautą rezultatą galima laikyti atsakymu, bet šiuo atveju bus geriau gautus skaičius išreikšti algebrine forma:

$$w_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$
$$w_1=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},$$
$$w_2=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}.$$

Atkreipkime dėmesį, kad plokštumos taškai w_0, w_1 ir w_2 (15 pav.) yra taisyklingojo trikampio viršūnės. Tai ne atsitiktinumas: jei $z\neq 0$ ir $n>2$, tai n-tojo laipsnio šaknys iš skaičiaus z yra viršūnės taisyklingo n-kampio, kurio centras yra taškas O. Šis teiginys išplaukia iš to, kad visų šaknų moduliai lygūs $\sqrt[n]{|z|}$, o kampai tarp krypčių į „gretimas" šaknis w_k ir w_{k+1} lygūs $\frac{2\pi}{n}$.

Vieneto šaknys. Ypač reikia atkreipti dėmesį į atvejį $z=1$. Skaičiaus 1 n-tojo laipsnio šaknis susitarta žymėti ε_k, t. y.

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(0\leqslant k<n).$$

Pirmiausia būtina pabrėžti, kad, turėdami vieneto šaknis, galime truputį kitaip nusakyti šaknis iš bet kurio skaičiaus z, būtent, iš (11) formulės gauti

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=w_0\varepsilon_k.$$

Vadinasi, norint rasti visas šaknis iš skaičiaus z, reikia vieną šaknį — su „paprasčiausiu" argumentu $\frac{\alpha}{n}$ — dauginti iš visų vieneto šaknų.

Nurodysime keletą n-tojo laipsnio šaknų iš 1 savybių.

1) Kiekviena n-tojo laipsnio šaknis iš 1 yra pirmosios šaknies laipsnis. Tiksliau sakant,

$$\varepsilon_k=\varepsilon_1^k.$$

Šita lygybė gaunama tiesiog iš Muavro formulės:

$$\varepsilon_1^k=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

2) Šaknys ε_k ir ε_{n-k} yra jungtiniai skaičiai, t. y.

$$\overline{\varepsilon_k}=\varepsilon_{n-k}.$$

Iš tikrųjų,

$$\varepsilon_{n-k}=\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}=$$
$$=\cos\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)=$$
$$=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}=\overline{\varepsilon_k}.$$

3) Visų n-tojo laipsnio šaknų iš 1 suma lygi 0.

Kadangi $\varepsilon_1^n=1$, tai, remdamiesi 1) teiginiu, gauname

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2+\ldots+\varepsilon_1^{n-1}=\frac{\varepsilon_1^n-1}{\varepsilon_1-1}=0.$$

Dabar galime išspręsti iš karto du 1 paragrafe suformuluotus uždavinius: 8 ir 11.

Kokią aibę sudaro plokštumos taškai, kurių atstumų nuo taisyklingojo daugiakampio viršūnių kvadratų suma lygi d?

Šį geometrinį uždavinį išspręsime, net nesiremdami brėžiniu. Duoto n-kampio centrą O laikydami koordinačių pradžia, teigiamąjį abscisių ašies spindulį išvesime per kurią nors daugiakampio viršūnę A_0. Tuomet daugiakampio viršūnes atitiks kompleksiniai skaičiai

$$w_0=R,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{n-1};$$

R — apie daugiakampį apibrėžto apskritimo spindulys.

Pasirinkime bet kurį plokštumos tašką M ir tarkime, kad z yra jį atitinkantis kompleksinis skaičius. Taškas M priklausys ieškomajai aibei X tada ir tik tada, kai bus teisinga lygybė

$$|z-w_0|^2+|z-w_1|^2+\ldots+|z-w_{n-1}|^2=d. \qquad (12)$$

Pertvarkome kiekvieną kairėje pusėje parašytos sumos dėmenį:

$$|z-w_i|^2=(z-w_i)\,(\overline{z-w_i})=(z-w_i)\,(\bar z-\bar w_i)=$$
$$=z\bar z+w_i\bar w_i-z\bar w_i-\bar z w_i=|z|^2+R^2-z\bar w_i-\bar z w_i.$$

Tai įgalina (12) lygybę pakeisti šitokia lygybe:

$$d=n|z|^2+nR^2-z(\overline{w}_0+\ldots+\overline{w}_{n-1})-\overline{z}(w_0+\ldots+w_{n-1}).$$

Kadangi skaičiai $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ yra viršūnės taisyklingo n-kampio, kurio centras sutampa su O, tai tie skaičiai yra n-tojo laipsnio šaknys iš skaičiaus R, t. y. $w_k=\sqrt[n]{R}\varepsilon_k$. Todėl, remdamiesi vieneto šaknų 3) savybe, gauname

$$w_0+w_1+\ldots+w_{n-1}=\sqrt[n]{R}(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{n-1})=0,$$

o iš to išplaukia, kad ir

$$\overline{w}_0+\overline{w}_1+\ldots+\overline{w}_{n-1}=0.$$

Vadinasi, įsitikinome, kad $d=n|z|^2+nR^2$, arba

$$|z|^2=\frac{d}{n}-R^2.$$

Dabar aišku, kad tuo atveju, kai $d>nR^2$, aibė X yra apskritimas, kurio spindulys lygus $\sqrt{\frac{d}{n}-R^2}$, o centras sutampa su O; kai $d=nR^2$, aibei X priklauso tik taškas O; kai $d<nR^2$, aibė X yra tuščia.

Daugianarį x^n-1 *išskaidyti tiesiniais ir kvadratiniais dauginamaisiais.*

Daugianaris x^n-1 turi n šaknų ε_k. Anksčiau, nagrinėdami daugianarius su realiais koeficientais, sužinojome, kad toks daugianaris išreiškiamas n tiesinių dauginamųjų sandauga: tai išplaukia iš Bezu teoremos. Tuomet samprotaudami visiškai nesirėmėme tuo, kad daugianarių koeficientai yra realūs skaičiai, todėl visas pastebėtas tų daugianarių savybes faktiškai turi ir daugianariai su kompleksiniais koeficientais. Vadinasi, šiuo atveju galima rašyti:

$$x^n-1=(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_{n-1}).$$

Gautas skaidinys, žinoma, mūsų nepatenkina, nes, formuluojant 11 uždavinio sąlygą, be abejo, turėta galvoje, kad dauginamųjų koeficientai turi būti realūs (juk tuo metu iš viso nebuvote girdėję apie kompleksinius skaičius).

Dabar prisiminkime vieneto šaknų 2) savybę ($\overline{\varepsilon}_k=\varepsilon_{n-k}$) ir išnagrinėkime atskirai atvejį, kai n — nelyginis skaičius, ir atvejį, kai n — lyginis skaičius. Jei skaičius n nelyginis, tai dvinarius

$x-\varepsilon_1$, $x-\varepsilon_2$, ..., $x-\varepsilon_{n-1}$ galima sudauginti po du, sudarant poras iš dvinarių, „vienodai nutolusių nuo galų“:

$$(x-\varepsilon_k)(x-\varepsilon_{n-k})=(x-\varepsilon_k)(x-\bar{\varepsilon}_k)=$$
$$=x^2-(\varepsilon_k+\bar{\varepsilon}_k)x+1=x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1$$

$(k=1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2})$. Po to gausime šitokį skaidinį:

$$x^n-1=(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\ldots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right).$$

Panašiai nagrinėjamas ir atvejis, kai n yra lyginis skaičius; siūlome tai padaryti savarankiškai.

Pratimai

66. Apskaičiuokite šaknis ir pavaizduokite jas geometriškai:

a) $\sqrt[3]{1}$; d) $\sqrt[3]{-i}$; g) $\sqrt[4]{-i}$;
b) $\sqrt[3]{-1}$; e) $\sqrt[3]{1+i}$; h) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$;
c) $\sqrt[3]{i}$; f) $\sqrt[6]{i}$; i) $\sqrt[5]{3+4i}$.

67. Jei natūrinis skaičius k yra natūrinio skaičiaus n daliklis, tai kiekviena k-tojo laipsnio šaknis iš vieneto yra n-tojo laipsnio šaknis iš vieneto. Įrodykite.

68. Jei kiekviena k-tojo laipsnio šaknis iš vieneto yra n-tojo laipsnio šaknis iš vieneto, tai k yra skaičiaus n daliklis. Įrodykite.

69. Jei α yra n-tojo laipsnio šaknis iš vieneto ir m-tojo laipsnio šaknis iš vieneto, o d — bendras didžiausias skaičių m ir n daliklis, tai $\alpha^d=1$. Įrodykite.

70. Jei $\alpha^n=1$ ir $\alpha^m=1$, o M — bendras mažiausias skaičių n ir m kartotinis, tai $\alpha^M=1$. Įrodykite.

71. Jei $\alpha^k\neq 1$, kai natūrinis skaičius k mažesnis už n $(1\leqslant k<n)$, tai n-tojo laipsnio vieneto šaknis α vadinama pirmine. Įrodykite, kad kiekviena n-tojo laipsnio šaknis iš vieneto yra pirminės šaknies laipsnis.

72. Raskite visas pirmines vieneto šaknis, kurių laipsnis lygus: a) 4; b) 8; c) 6; d) 12; e) 24.

73. Įrodykite, kad pirminių n-tojo laipsnio šaknų iš vieneto yra tiek, kiek yra natūrinių skaičių, mažesnių už n ir reliatyviai pirminių su n.

74. Išspręskite lygtis:

a) $(x+i)^4+(x-i)^4=0$; c) $z^3=-z$;

b) $z^4=z$; d) $\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.

75. Išspręskite lygčių sistemas:

a) $\begin{cases} z^3+w^5=0, \\ z^5\cdot w^{11}=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} z^3+w^5=0, \\ z^2\cdot \overline{w}^4=1. \end{cases}$

76. Raskite visų n-tojo laipsnio vieneto šaknų k-tųjų laipsnių sumą.

77. Išskaidykite tiesiniais ir kvadratiniais dauginamaisiais su realiais koeficientais šiuos daugianarius:

a) $x^{2k}-1$; b) $x^{2k}+1$; c) $x^{2k+1}+1$.

78. Apie taisyklingą trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Įrodykite: jei taškas D priklauso apskritimo lankui BC, tai $|BD|+|CD|=|AD|$.

4. Kompleksinio kintamojo rodiklinė, logaritminė ir trigonometrinės funkcijos. Oilerio formulė. Jau 1 paragrafe sakėme, kad trigonometrinės funkcijos kompleksinių skaičių aibėje yra „beveik tas pats“, kas ir rodiklinė funkcija. Kol kas šis teiginys, žinoma, visiškai nepagrįstas net intuityviai, nes apskritai dar neįsivaizduojame, net apytiksliai, kaip apibrėžiamos šios kompleksinio kintamojo funkcijos ir kokios jų savybės. Tačiau dabar jau viskas paruošta reikiamiems apibrėžimams.

Rodiklinė funkcija. Visų toliau nagrinėjamų kompleksinio kintamojo funkcijų apibrėžimai pagrįsti kompleksinių skaičių, išreikštų trigonometrine forma, dauginimo taisykle. Būtent, jei reiškinį $\cos x+i\sin x$ pažymėtume $f(x)$, tai dauginimo taisyklę galėtume parašyti šitaip:

$$f(x)f(y)=f(x+y). \tag{13}$$

Ši lygybė primena pagrindinę rodiklinės funkcijos savybę, kai funkcija apibrėžta, savaime aišku, realiųjų skaičių aibėje *.

Susitarsime laikytis šio apibrėžimo:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad (x\in\mathbf{R}). \tag{14}$$

Kol kas nesvarstysime, ar tas apibrėžimas natūralus (vargu ar kam jis atrodo natūralus net po ką tik išdėstytos pastabos). Dar

---

* Jei realaus kintamojo funkcija $f(x)$ turi (13) savybę ir yra, pavyzdžiui, tolydi, tai galima įrodyti, kad ji būtinai yra rodiklinė funkcija. Todėl (13) lygybė faktiškai nusako būdingą rodiklinės funkcijos savybę. Kaip tik ši mintis ir nukreipia mus prie tokių apibrėžimų kompleksinių skaičių aibėje.

grįšime prie šito apibrėžimo, o dabar pasinaudosime teise, kurią turi matematikas, kurdamas teoriją: dėl apibrėžimo nesiginčijama — jo reikia laikytis.

Kaip pavyzdį pateiksime keletą pagal (14) apibrėžimą teisingų lygybių:

$$e^0=1,\ e^i=\cos 1+i\sin 1,\ e^{2\pi i}=1,\ e^{i\frac{\pi}{2}}=i.$$

(14) apibrėžimas įgalina pakelti skaičių e laipsniu su grynai menamu rodikliu. Kaip šį apibrėžimą „išplėsti" visiems kompleksiniams skaičiams? Natūralu remtis ta pačia pagrindine rodiklinės funkcijos savybe, kuri išreikšta (13) lygybe. Norėtume, kad šią savybę turėtų ir kompleksinio kintamojo rodiklinė funkcija. Tuomet turi būti teisinga lygybė $e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$. Kaip tik šio apibrėžimo ir susitarsime laikytis, tik atsižvelgsime į (14) formulę:

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \qquad (15)$$

Šita formule apibrėžiamas skaičiaus e laipsnis su bet kuriuo kompleksiniu rodikliu $z=x+iy$.

Vadinasi, kompleksinių skaičių aibėje **C** apibrėžėme rodiklinę funkciją $f(z)=e^z$; be to, jei z yra realus, t. y. $z=x+0i$, tai $e^z=e^x$, todėl naujasis skaičiaus e laipsnio apibrėžimas „senojoje" aibėje **R** turi „senąją" prasmę. Tai duoda mums pagrindą sakyti, kad naujasis skaičiaus e laipsnio apibrėžimas išplečia senąją skaičiaus e laipsnio su realiuoju rodikliu sąvoką.

Be to, turime moralinę teisę sudarytą funkciją vadinti rodikline ne dėl to, kad ji žymima e^z, o todėl, kad ji turi (13) savybę, pagrindinę rodiklinės funkcijos savybę. Iš tikrųjų, jei $z=x+iy$, $w=u+iv$, tai pagal (15) apibrėžimą

$$e^z\cdot e^w=e^x(\cos x+i\sin y)\cdot e^u(\cos v+i\sin v)=$$
$$=e^{x+u}(\cos(y+v)+i\sin(y+v))=e^{z+w}.$$

Atkreipkime dėmesį, kad kompleksinio kintamojo rodiklinė funkcija turi savybę, dėl kurios ji atrodo visiškai nepanaši į realaus kintamojo rodiklinę funkciją: ji yra periodinė! Iš tikrųjų, kai z — bet kuris kompleksinis skaičius,

$$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z,$$

todėl skaičius $2\pi i$ yra tos funkcijos periodas. Nesunku įsitikinti, kad kiekvienas rodiklinės funkcijos periodas yra skaičius $2k\pi i$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Trigonometrinės funkcijos. Oilerio formulė. Anksčiau iškelta mintis, kad kompleksinio kintamojo rodiklinė funkcija yra panaši į trigonometrines funkcijas, po paskutinių apibrėžimų neatrodo tokia neįtikima. Tiesą sakant, jau (15) formulė primena aptariamą ryšį: pagal tą formulę kompleksinio kintamojo rodiklinės funkcijos reikšmės išreiškiamos realaus kintamojo sinuso ir kosinuso reikšmėmis. Dabar padarysime atvirkščiai: kompleksinio kintamojo sinusą ir kosinusą apibrėšime, vartodami rodiklinę funkciją.

„Sugalvodami" tuos apibrėžimus, remsimės ta pačia (15) formule. Kai $x=0$, iš jos gauname

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\quad e^{-iy}=\cos y-i\sin y,$$

todėl

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\quad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

Tos lygybės tinka tik tuo atveju, kai $y\in\mathbf{R}$: tik tokioms y reikšmėms (kol kas!) taikoma (15) formulė. Jas panaudosime atitinkamiems bendresniems apibrėžimams sudaryti, būtent, kai $z=$ $=x+iy$ yra bet kuris kompleksinis skaičius, susitarsime, kad

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{16}$$

Tomis formulėmis apibrėžiami bet kurio kompleksinio skaičiaus sinusas ir kosinusas.

„Naujieji" sinusas ir kosinusas, apibrėžti aibėje **C**, kai z yra realus skaičius, sutampa su „senaisiais" sinusu ir kosinusu. Iš tikrųjų, jei $z=x+0i$, tai

$$\cos z=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{(\cos x+i\sin x)+(\cos x-i\sin x)}{2}=\cos x,$$

$$\sin z=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos x-i\sin x)}{2i}=\sin x.$$

Todėl kompleksinio kintamojo sinusas ir kosinusas yra atitinkamų realaus kintamojo funkcijų plėtiniai į kompleksinių skaičių aibę.

Pasirodo, kad kompleksinio kintamojo sinusui ir kosinusui galima taikyti visas „paprastosios" trigonometrijos formules. Tas formules nesunku patikrinti, todėl čia patikrinsime tik tris: to paties argumento sinuso ir kosinuso priklausomybę, sumos kosinuso formulę ir vieną redukcijos formulę.

Jei $z=x+iy$ yra bet kuris kompleksinis skaičius, tai

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2=$$

$$=\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2}{4}-\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}-2}{4}=1.$$

Jei $z=x+iy$ ir $w=u+iv$ yra kompleksiniai skaičiai, tai

$$\cos z\cdot\cos w-\sin z\cdot\sin w=$$

$$=\frac{(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw})}{4}+\frac{(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}-e^{-iw})}{4}=$$

$$=\frac{e^{i(z+w)}+e^{i(z-w)}+e^{-i(z-w)}+e^{-i(z+w)}+e^{i(z+w)}-e^{i(z-w)}-e^{-i(z-w)}+e^{-i(z+w)}}{4}=$$

$$=\frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2}=\cos(z+w).$$

Pagaliau, atsižvelgę į tai, kad $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ ir $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$, gauname

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}}{2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-iz}+e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{iz}}{2}=$$

$$=i\,\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z.$$

Kompleksinio kintamojo sinusas ir kosinusas yra periodinės funkcijos:

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz}e^{2\pi i}+e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z.$$

Panašiai įsitikiname, kad sinusas irgi yra periodinė funkcija. Vadinasi, „natūralus" sinuso ir kosinuso periodiškumas išplaukia iš to netikėto fakto, kad rodiklinė funkcija yra periodinė.

Tačiau kompleksinio kintamojo trigonometrinės funkcijos, kaip ir rodiklinė funkcija, lyginant jas su atitinkamomis realaus kintamojo funkcijomis, slepia dar vieną staigmeną. Realaus kintamojo sinusas ir kosinusas yra skaičiumi 1 aprėžtos iš viršaus funkcijos, tuo tarpu jau $\cos i=\frac{e^{-1}+e}{2}$ yra didesnis už 1. Dar daugiau, kompleksinis sinusas ir kosinusas gali įgyti bet kurias reikšmes — tas teiginys, kaip įsitikinsime, išplaukia iš to, kad kiekviena kvadratinė lygtis su kompleksiniais koeficientais turi šaknį, o rodiklinės funkcijos reikšmės yra visi kompleksiniai skaičiai, išskyrus 0.

Eksponentės, sinuso ir kosinuso priklausomybę galima išreikšti viena lygybe:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \qquad (17)$$

Šią tiesiogiai iš (16) formulių išvedamą lygybę tenkina kiekvienas kompleksinis skaičius z. Atkreipkime dėmesį, kad vėl grįžome prie (14) formulės, kuria grindėme visus po jos einančius apibrėžimus, tik dabar šią lygybę tenkina ne tik realieji skaičiai, bet ir visi kompleksiniai skaičiai z.

(17) formulė ir yra garsioji Oilerio formulė. Šį epitetą pateisina net tas menkutis kompleksinių skaičių teorijos fragmentas, kurį čia išdėstėme. Ir vis dėlto negali nestebinti ši paprasta priklausomybė, siejanti tokias iš pažiūros tolimas sąvokas, kaip laipsnis ir sinusas, kurio apibrėžimas grindžiamas grynai geometriniais samprotavimais. Beje, toliau pateiksime keletą pastabų, kurios truputį nušviečia klausimą, kaip galima „įspėti" Oilerio formulę, remiantis visiškai kitokiais samprotavimais.

Logaritminė funkcija. Logaritminė funkcija realiųjų skaičių aibėje apibrėžiama kaip funkcija, atvirkštinė rodiklinei. Tuo atveju pats logaritminės funkcijos egzistavimas grindžiamas faktu, kad realaus kintamojo rodiklinė funkcija yra *apgręžiama*, t. y. kiekvieną reikšmę ji įgyja tik po vieną kartą.

Su kompleksinio kintamojo rodikline funkcija yra visiškai kitaip: ji yra periodinė, todėl kiekvieną savo reikšmę įgyja be galo daug kartų. Kaip tada apibrėžti kompleksinių skaičių logaritmus? Apibrėžimo idėja, beje, lieka ta pati, kaip ir realiųjų skaičių aibėje.

Tarę, kad z yra bet kuris fiksuotas ir nelygus nuliui kompleksinis skaičius, išnagrinėsime lygtį

$$e^w = z. \qquad (18)$$

Skaičių z išreikškime trigonometrine forma, o nežinomąjį w — algebrine forma:

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad w = x + iy.$$

Tuomet $e^w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, todėl skaičius z bus išreikštas dviem būdais trigonometrine forma:

$$e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Iš to aišku, kad $e^x = r$, o argumentai y ir α skiriasi skaičiumi $2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), taigi $x = \ln r$ (paprastas „realusis" logaritmas), o $y = \alpha + 2k\pi$.

Vadinasi, įsitikinome, kad (18) lygties sprendiniai sudaro aibę

$$\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbf{Z}\}. \qquad (19)$$

Gavome begalinę aibę, kurios kiekvieną elementą galima vadinti skaičiaus z logaritmu (natūriniu).

Panaši situacija susidaro ir mokyklinėje matematikoje, mėginant apibrėžti funkciją, atvirkštinę sinusui: lygtis $\sin x = a$, kai $|a| \leqslant 1$ turi be galo daug sprendinių, o skaičiaus a arksinusu pavadiname tą sprendinį, kuris priklauso intervalui $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Galėtume panašiai daryti ir aptariamuoju atveju: skaičiaus z logaritmu pavadinti tą (19) aibės skaičių, kurio menamoji dalis sutampa, pavyzdžiui, su skaičiaus z pagrindiniu argumentu.

Kompleksinio kintamojo funkcijų teorijoje dažniausiai darome kitaip: visus (19) aibės skaičius

$$w_k = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k \in \mathbf{Z})$$

vadiname skaičiaus z logaritmais, o sąryšį, kurį nusako porų (z, w_k) aibė,— daugiareikšme *logaritmine funkcija.*

Ta daugiareikšmė funkcija žymima Ln. Mokyklinio funkcijos apibrėžimo požiūriu sąryšis Ln nėra funkcija, nes jam priklauso poros su vienodomis pirmomis ir skirtingomis antromis komponentėmis. Simboliu $\operatorname{Ln} z$ dažnai žymima konkretaus skaičiaus z visų logaritmų aibė.

Pavyzdžiui, iš lygybių

$$1 = \cos 0 + i \sin 0, \quad -1 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$$

matome, kad

$$\operatorname{Ln} 1 = \{2k\pi i \mid k \in \mathbf{Z}\}, \operatorname{Ln}(-1) = \{(2k+1)\pi i \mid k \in \mathbf{Z}\},$$

$$\operatorname{Ln}(1 - i) = \left\{\frac{1}{2} \ln 2 + \left(2k + \frac{7}{4}\right)\pi i \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Atkreipiame dėmesį į tai, kad pagal mūsų samprotavimus kiekvienas nelygus nuliui skaičius turi be galo daug logaritmų; tuo tarpu lygtis $e^z = 0$ neturi sprendinių, nes

$$|e^{x+iy}| = |e^x| = e^x \neq 0.$$

Kitaip sakant, *rodiklinės funkcijos* e^z *reikšmių aibei priklauso visi kompleksiniai skaičiai, išskyrus* 0.

Dabar jau galime spręsti trigonometrines lygtis kompleksinių skaičių aibėje.

Iš pradžių išnagrinėsime paprasčiausią lygtį.

1. *Išspręskite lygtį* $\sin x = 0$.

Remdamiesi (15) apibrėžimu, šitą lygtį galima pakeisti lygtimi $e^{iz}-e^{-iz}=0$, arba $e^{iz}=e^{-iz}$, t. y. $e^{2iz}=1$. Tai reiškia, kad $2iz\in \mathrm{Ln}\,1$, t. y.

$$2iz=2k\pi i \quad (k\in \mathbf{Z}).$$

Iš čia lengvai įsitikiname, kad $z=k\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$.

Vadinasi, kompleksinis sinusas reikšmę 0 įgija tuose pačiuose taškuose, kaip ir realusis sinusas.

2. *Išspręskite lygtį* $\sin x=-\frac{1}{2}$.

Kaip ir anksčiau, turimą lygtį keisime šitaip:

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\frac{1}{2},$$
$$e^{iz}+i-e^{-iz}=0,$$
$$e^{2iz}+ie^{iz}-1=0.$$

Vadinasi, $w=e^{iz}$ yra kvadratinės lygties $x^2+ix-1=0$ šaknis. Šios lygties diskriminantas lygus $i^2+4=3$, todėl jos šaknys yra

$$x_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Dabar dar reikia išspręsti dvi lygtis:

$$e^{iz}=\frac{\sqrt{3}-i}{2} \text{ ir } e^{iz}=\frac{-\sqrt{3}-i}{2},$$

arba

$$e^{iz}=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6} \text{ ir } e^{iz}=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}.$$

Ir vėl gauname $iz\in \mathrm{Ln}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$, t. y. $iz=\left(\frac{11\pi}{6}+\right.$ $\left.+2k\pi\right)i$, o iš čia

$$z=\frac{11\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in \mathbf{Z}).$$

Analogiškai randame antros lygties sprendinius: $z=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$. Vadinasi, suradome visus kompleksinius pradinės lygties sprendinius.

Atkreipiame dėmesį, kad ir šiuo atveju gavome tuos pačius sprendinius, kuriuos gaudavome realiųjų skaičių aibėje. Taip bus ir su bet kuria lygtimi $\sin x=a$, kai $a\in \mathbf{R}$ ir $|a|\leqslant 1$.

3. *Išspręskite lygtį* $\sin x=2$.

Samprotaudami visiškai taip pat, kaip ir praeitame pavyzdyje, įsitikiname, kad skaičius $w=e^{iz}$ šiuo atveju yra lygties x^2-4ix-

$-1=0$ šaknis. Kadangi $D/4=4i^2+1=-3$, tai tos lygties šaknys yra $x_{1,2}=2i\pm i\sqrt{3}$. Todėl dabar reikia išspręsti dvi lygtis:

$$e^{iz}=(2+\sqrt{3})i,\ e^{iz}=(2-\sqrt{3})i.$$

Taikydami, kaip ir anksčiau, logaritmą

$$\mathrm{Ln}((2\pm\sqrt{3})i)=\left\{\ln(2\pm\sqrt{3})+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\},$$

gauname formulę pradinės lygties šaknims reikšti:

$$z=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-i\ln(2\pm\sqrt{3})\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

Dabar nesunku įrodyti, kad ir bet kuri $\sin w=z$ arba $\cos w=z$ pavidalo lygtis turi sprendinį, todėl kompleksinio kintamojo sinusas ir kosinusas gali įgyti bet kurias reikšmes. Kitaip sakant sinuso ir kosinuso reikšmių aibės sutampa su visa aibe **C**.

Apie Oilerio formulės kilmę. Ką tik minėti samprotavimai ir atlikti skaičiavimai visiškai įtikina, kad rodiklinę ir trigonometrines funkcijas verta apibendrinti, pritaikyti kompleksinių skaičių aibei. Ir vis dėlto išdėstyta tų funkcijų apibrėžimo schema atrodo šiek tiek nenatūrali. Konkrečiai kalbant,— o tai labai rimtas „psichologinis" šios schemos trūkumas — visiškai neaišku, kodėl reiškinį $\cos x+i\sin x$ pažymėjome e^{ix}, o ne, pavyzdžiui, 2^{ix}. Juk rodiklinė funkcija 2^x nė kiek „ne blogesnė" už funkciją e^x, o nuo žymėjimo pakeitimo dėstymas visai nepasikeičia.

Aptariamų funkcijų apibrėžimas matematikoje iš tikrųjų yra kitoks, pagrįstas kitomis idėjomis. Tai, žinoma, nereiškia, kad mūsų samprotavimai buvo neteisingi — logikos požiūriu jiems nieko negalima prikišti.

Vis dėlto, apibrėžiant „tikrai" matematiškai kompleksinio kintamojo rodiklinę ir trigonometrines funkcijas, remiamasi gana sudėtingu matematiniu aparatu, sukuriamu realaus ir kompleksinio kintamojo laipsninių eilučių teorijoje.

Iš principo ir ta teorija nėra sunki, bet, norint ją sukurti visu privalomu matematiniu griežtumu, reikia daug daugiau laiko, negu mums skirta. Šios teorijos mokomasi aukštojoje mokykloje, o čia tik bendrais bruožais papasakosime, kaip ji kuriama.

Jei simboliais $S_n(x)$ ir $T_n(x)$ pažymėsime funkcijas

$$S_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$T_n(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

tai galima įrodyti, kad su kiekvienu fiksuotu skaičiumi $x \in \mathbf{R}$ teisingos lygybės

$$\sin x = \lim_{n \to \infty} S_n(x), \quad \cos x = \lim_{n \to \infty} T_n(x).$$

Todėl sakoma, kad sinusas ir kosinusas yra atitinkamų laipsninių eilučių sumos:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad (20)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots. \qquad (21)$$

Galima taip pat įrodyti, kad, esant bet kokiam $x \in \mathbf{R}$,

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right),$$

todėl

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots. \qquad (22)$$

Jei dabar, visiškai užmiršę matematinį griežtumą, (22) eilutėje vietoj x parašytume ix ir sugrupuotume dėmenis, tai, remdamiesi (20) ir (21) lygybėmis, gautume

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \\ + \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + \\ + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = \cos x + i \sin x.$$

Taigi vėl gavome Oilerio formulę. Savaime aišku, kad atliktasis „skaičiavimas" toli gražu ne įrodymas, nes padarėme keletą beprasmių ir niekuo nepagrįstų pertvarkymų: pavyzdžiui, (22) lygybėje, kuri išvesta, laikant x realiu, vietoj x parašėme menamą reiškinį ix; net nepagalvojome, kaip suprasti begalinę sumą, sudarytą iš kompleksinių dėmenų (juk kompleksinių skaičių aibėje dar neapibrėžta ribos sąvoka); perstatinėjome ir grupavome begalinės sumos dėmenis, neturėdami tam teisės, o tai ne tuščias būgštavimas, nes griežtoje teorijoje parodoma, kad, perstačius begalinės sumos dėmenis, jos reikšmė gali pasikeisti.

Nepaisant visko, iš to nepagrįsto skaičiavimo galima suprasti, kaip išvedama Oilerio formulė. Be to, dabar pasidarė aiškiau, kodėl susitarėme rašyti e^{ix}, o ne 2^{ix}.

Šie samprotavimai parodo, kokią matematinę teoriją reikia kurti kompleksinių skaičių aibėje, norint griežtai išvesti Oilerio formulę, būtent, laipsninių eilučių teoriją. Ta teorija buvo su-

kurta, bet daug vėliau, negu L. Oileris grynai intuityviai atrado savo garsiąją formulę.

Savaime aišku, kad minimos teorijos pagrindą sudaro kompleksinio kintamojo funkcijų ribų teorija. Ribos apibrėžimas šiuo atveju visiškai panašus į realaus kintamojo funkcijos ribos apibrėžimą:

Skaičius A vadinamas funkcijos $f(z)$ riba, kai $z \to z_0$, jei bet kurį teigiamą skaičių ε atitinka toks teigiamas skaičius δ, kad kiekvienas z, tenkinantis nelygybę $0<|z-z_0|<\delta$, tenkina ir nelygybę $|f(z)-A|<\varepsilon$, t. y.

$$0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-A|<\varepsilon.$$

Kompleksinio kintamojo funkcijų ribos turi tas pačias savybes, kaip ir realaus kintamojo funkcijų ribos. Ribų teorija įgalina apibrėžti tolydžiosios funkcijos bei jos išvestinės sąvokas ir išvystyti visą laipsninių eilučių teoriją. Tuomet (20), (21) ir (22) eilutėmis galima apibrėžti eksponentę, sinusą ir kosinusą. Be to, iš teorijos paaiškėja, kad (22) eilutėje vietoj x galima rašyti ix ir kad po to daromi pertvarkymai yra teisėti.

Laipsninių eilučių teorijoje tarp kitko išaiškinama, kad laipsnines eilutes galima diferencijuoti panariui, kaip ir daugianarius, todėl lengvai įsitikiname, kad teisingos šios „natūralios“ formulės:

$$(\sin z)'=\cos z, \quad (\cos z)'=-\sin z,$$
$$(e^z)'=e^z. \qquad (23)$$

Paskutinė (23) formulė bus reikalinga sekančiame paragrafe, taikant kompleksinius skaičius diferencialinių lygčių sprendimui.

Pratimai

79. Apskaičiuokite:

a) $e^{1+\pi i}$; d) $\operatorname{Ln}(-1)$;
b) e^{2+i}; e) $\operatorname{Ln}(-i)$;
c) $\operatorname{Ln} 1$; f) $\operatorname{Ln} i$.

80. Raskite atvaizdžiu $z \to e^z$ gaunamus nurodytųjų tiesių vaizdus:

a) $\operatorname{Re} z=0$; c) $\operatorname{Im} z=\frac{\pi}{4}$;
b) $\operatorname{Re} z=a$; d) $\operatorname{Im} z=a$.

81. Įrodykite, kad funkcijoms $w=\sin z$, $w=\cos z$ ir $w=\operatorname{tg} z$ tinka mokyklinės trigonometrijos formulės, pavyzdžiui, sudėties teorema, dvigubo argumento formulė ir t. t.

82. Išspręskite lygtis:

a) $\sin z=3$; c) $\operatorname{tg} z=i$;
b) $\cos z=-1$; d) $e^z=-1$.

83. Sužinokite, kokios turi būti z reikšmės, kad būtų realūs:

a) $\sin z$; b) $\cos z$.

84. Remdamiesi logaritmu, apibrėšime kėlimą kompleksiniu laipsniu, būtent, tarsime, kad $a^z=e^{z \operatorname{Ln} a}$. Vadinasi, funkcija $z \to a^z$, kaip ir logaritmas, bus daugiareikšmė. Remdamiesi tuo apibrėžimu, apskaičiuokite:

a) i^i; b) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^i$; c) i^{1+2i}.

§ 4. KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ TAIKYMAS

1. Pagrindinė daugianarių algebros teorema ir jos išvados. Daugianarių su kompleksiniais koeficientais teorija yra darnesnė ir paprastesnė už daugianarių su realiais koeficientais teoriją. To priežastis — pagrindinė teorema, kuri teisinga, tik kalbant apie daugianarius su kompleksiniais koeficientais. Štai jos formuluotė: *Kiekvienas n-tojo laipsnio daugianaris su kompleksiniais koeficientais, kai* $n \geqslant 1$, *turi bent vieną kompleksinę šaknį.*

Šią teoremą pirmasis griežtai įrodė vokiečių matematikas K. Gausas, todėl ji dažniausiai vadinama *Gauso teorema.* Šiai teoremai įrodyti reikia teiginių, kurių šioje knygoje neįmanoma išdėstyti. Todėl Gauso teoremos įrodymo nepateiksime.

Mums labai svarbios išvados, kurios išplaukia iš pagrindinės teoremos.

1. *Kiekvienas n-tojo* ($n \geqslant 1$) *laipsnio daugianaris su kompleksiniais koeficientais išreiškiamas n tiesinių dauginamųjų sandauga.*

Šis teiginys lengvai įrodomas indukcijos metodu. Kai $n=1$, pats daugianaris yra tiesinis. Tarkime, kad įrodinėjamas teiginys tinka n-tojo laipsnio daugianariams. Jei $f(x)$ yra $(n+1)$-jo laipsnio daugianaris, tai jis turi šaknį $\alpha_1 \in \mathbf{C}$, todėl, kaip pasakyta Bezu teoremoje, jis išreiškiamas sandauga:

$$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x).$$

Kadangi $f_1(x)$ yra n-tojo laipsnio daugianaris, tai jis pagal indukcijos prielaidą išreiškiamas n tiesinių dauginamųjų sandauga.

Todėl $f(x)$ yra sandauga, kurią sudaro $n+1$ tiesinis dauginamasis. Tai ir reikėjo įrodyti.

2. *Kiekvienas n-tojo ($n \geqslant 1$) laipsnio daugianaris su kompleksiniais koeficientais turi n šaknų, jei kiekviena šaknis skaitoma tiek kartų, kiek vienetų turi jos kartotinumas.*

Iš tikrųjų, kaip ką tik įrodėme, n-tojo ($n \geqslant 1$) laipsnio daugianaris išreiškiamas n tiesinių dauginamųjų sandauga:

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Aišku, kad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yra daugianario $f(x)$ šaknys. Jei paskutinės lygybės dešinėje pusėje vienodų dauginamųjų sandaugas pakeisime laipsniais, tai $f(x)$ bus išreikštas šitaip:

$$f(x) = a_0(x-\beta_1)^{k_1}(x-\beta_2)^{k_2}\ldots(x-\beta_s)^{k_s}.$$

Tuomet šaknys $\beta_1, \ldots, \beta_s$ jau bus skirtingos, o rodikliai $k_1, \ldots, k_s$ reikš tų šaknų kartotinumą.

Kadangi lygybės abiejose pusėse parašyti to paties laipsnio daugianariai, tai

$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_s,$$

o tai ir reikėjo įrodyti.

3. *Daugianaris $f(x)$ dalijasi iš daugianario $g(x)$ tada ir tik tada, kai kiekviena daugianario $g(x)$ šaknis yra daugianario $f(x)$ šaknis ir jos kartotinumas daugianaryje $g(x)$ ne didesnis už kartotinumą daugianaryje $f(x)$.*

Įrodykite šį teiginį savarankiškai, tam panaudodami daugianarių $f(x)$ ir $g(x)$ skaidinius tiesiniais dauginamaisiais.

Pabrėšime, kad, kalbant apie daugianarius su realiais koeficientais, atitinkamas teiginys nėra teisingas. Pavyzdžiui, daugianaris $x+1$ nesidalija iš daugianario $x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)$, nors abu daugianariai turi tik po vieną paprastą šaknį -1.

Remdamiesi pagrindine daugianarių algebros teorema, galime įrodyti n-tojo laipsnio daugianarį liečiantį teiginį, kuris mokyklinėje matematikoje įrodomas tuo atveju, kai $n=2$, ir vadinamas Vijetos teorema. Tas teiginys bendruoju atveju taip pat vadinamas *Vijetos teorema.*

4. *Sakykime, $f(x)$ yra daugianaris su kompleksiniais koeficientais:*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

($a_0 \neq 0$). *Tuomet suma, kurios dėmenys yra visos daugianario $f(x)$ šaknų sandaugos, sudarytos iš k daugiklių ($k=1, \ldots, n$), lygi* $(-1)^k \frac{a_k}{a_0}$.

Atskiri atvejai: *visų daugianario* $f(x)$ *šaknų suma lygi* $-\frac{a_1}{a_0}$; *suma, kurios dėmenys yra šaknų sandaugos, turinčios po du daugiklius, lygi* $\frac{a_2}{a_0}$; *visų šaknų sandauga lygi* $(-1)^n \frac{a_n}{a_0}$.

Vijetos teoremos įrodymas, kai k — bet kuris skaičius, gana griozdiškas, todėl čia išnagrinėsime tik du kraštutinius atvejus: $k=1$ ir $k=n$. Tam reikalui $f(x)$ išreikškime sandauga

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n).$$

Sudauginę dešinėje pusėje parašytus dvinarius, gausime lygybę

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=$$
$$=a_0x^n-a_0(\alpha_1+\dots+\alpha_n)x^{n-1}+\dots+$$
$$+(-1)^n a_0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n.$$

Jei du daugianariai yra lygūs, tai, kaip įsitikinome 2 paragrafe, vienodų kintamojo x laipsnių koeficientai lygūs. Todėl

$$-a_0(\alpha_1+\dots+\alpha_n)=a_1,$$
$$(-1)^n a_0\alpha_1\dots\alpha_n=a_n,$$

o iš čia kaip tik išplaukia reikiamos lygybės.

Tolesnis teiginys yra vienas būdingiausių pavyzdžių, parodančių, kaip kompleksiniai skaičiai taikomi „grynai realiems" uždaviniams, kurių formuluotė neturi nieko bendro su kompleksiniais skaičiais.

5. *Kiekvienas n-tojo* ($n\geqslant 1$) *laipsnio daugianaris su realiais koeficientais išreiškiamas sandauga, kurią sudaro dviejų rūšių dauginamieji: tiesiniai su realiais koeficientais ir kvadratiniai trinariai su realiais koeficientais ir neigiamais diskriminantais.*

Šį teiginį įrodysime matematinės indukcijos metodu. Indukciją atliksime pagal daugianario laipsnį n. Teiginys, be abejo, teisingas pirmojo ir antrojo laipsnio daugianarių atžvilgiu. Tarsime, kad jis teisingas, kai daugianario laipsnis ne didesnis už n, ir išnagrinėsime $(n+1)$-jo laipsnio daugianarį $f(x)$.

Daugianaris $f(x)$ turi kompleksinę šaknį α, todėl pagal Bezu teoremą

$$f(x)=(x-\alpha)g(x). \qquad (1)$$

Jei skaičius α realus, tai $g(x)$ yra daugianaris su realiais koeficientais, todėl pagal indukcijos prielaidą jį galima išreikšti nurodyto tipo sandauga. Tuomet iš (1) lygybės matyti, kad daugianaris irgi išskaidomas nurodyto tipo dauginamaisiais.

Dabar tarkime, kad α yra menamas skaičius, t. y. $\bar{\alpha}\neq\alpha$. Prisiminkime teoremos, kurioje buvo išvardytos jungtinių skaičių

savybės, išvadą (p. 102). Joje pasakyta, kad šiuo atveju skaičius $\overline{\alpha}$ irgi yra daugianario $f(x)$ šaknis. Todėl iš (1) lygybės, vietoj x parašę $\overline{\alpha}$, gauname lygybę $f(\overline{\alpha})=(\overline{\alpha}-\alpha)g(\overline{\alpha})$, iš kurios matome, kad $g(\overline{\alpha})=0$. Vėl taikydami Bezu teoremą, rašome

$$g(x)=(x-\overline{\alpha})h(x).$$

Vadinasi, iš (1) išplaukia lygybė

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})h(x)=(x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha})h(x). \quad (2)$$

Kadangi $\alpha+\overline{\alpha}$ ir $\alpha\overline{\alpha}$ yra realūs skaičiai, tai trinaris $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+$ $+\alpha\overline{\alpha}$ turi realius koeficientus (ir, savaime aišku, neigiamą diskriminantą). Tokiu atveju daugianaris $h(x)$, kaip dviejų daugianarių su realiais koeficientais dalmuo, turi realius koeficientus.

Kadangi daugianario $h(x)$ laipsnis mažesnis už n, tai jam galima taikyti indukcijos prielaidą. Po to įrodytas teiginys apie daugianarį $f(x)$ išplaukia iš (2) lygybės.

Teorema įrodyta.

Gautas išvadas taikysime, spręsdami 1 paragrafe suformuluotus ir kai kuriuos kitus uždavinius.

Uždavinys. *Įrodykite, kad reiškinio $(p+1)^{2q+1}+p^{q+2}$ reikšmė, kai p ir q yra natūriniai skaičiai, dalijasi iš p^2+p+1.*

Sudarykime daugianarį $f(x)=(x+1)^{2q+1}+x^{q+2}$ ir įsitikinkime, kad jis dalijasi iš kvadratinio trinario x^2+x+1. Šis trinaris turi dvi skirtingas šaknis α ir β, todėl, atsižvelgiant į 3 išvadą, užtenka įrodyti, kad skaičiai α ir β yra daugianario $f(x)$ šaknys.

Pirmiausia atkreipkime dėmesį į štai ką: jei skaičius α yra trinario x^2+x+1 šaknis, tai $\alpha^2=-\alpha-1$, o antra vertus, $\alpha^2+\alpha+$ $+1=\frac{\alpha^3-1}{\alpha-1}$, todėl $\alpha^3=1$. Vadinasi,

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=(\alpha+1)^{2q+1}+\alpha^{q+2}=(-\alpha^2)^{2q+1}+\alpha^{q+2}=\\&=-(\alpha^2)^{2q+1}+\alpha^{q+2}=-\alpha^{4q+2}+\alpha^{q+2}=\\&=\alpha^{q+2}(1-\alpha^{3q})=0.\end{aligned}$$

Analogiškai įsitikiname, kad $f(\beta)=0$. Taigi $f(x)$ tikrai dalijasi iš x^2+x+1. Dalijimas „kampu“ įtikina, kad dalmens $g(x)$ koeficientai yra sveikieji skaičiai. Todėl gausime lygybę

$$f(p)=(p^2+p+1)g(p),$$

kurios daugiklis $g(p)$ bus sveikasis skaičius, o tai ir reikėjo įrodyti.

Uždavinys. *Kokios turi būti kintamojo n sveikosios reikšmės, kad reiškinio $n^{44}+n+1$ reikšmė būtų pirminis skaičius?*

Kai $n=0$ ir $n=-1$, ta reikšmė lygi 1 ir nėra pirminis skaičius. Kai $n=1$, reiškinio reikšmė lygi 3.

Įrodysime, kad kitus n atitinkančios reikšmės bus sudėtiniai skaičiai.

Sudarysime daugianarį $f(x)=x^{44}+x+1$ ir įsitikinsime, kad jis dalijasi iš kvadratinio trinario x^2+x+1. Kaip ir praeitame uždavinyje, tarsime, kad α ir β yra to trinario šaknys. Tuomet $f(\alpha)=$ $=\alpha^{44}+\alpha+1=\alpha^2+\alpha+1=0$. Panašiai ir $f(\beta)=0$.

Remdamiesi 3 išvada, teigiame, kad

$$x^{44}+x+1=(x^2+x+1)\cdot P(x)$$

ir kad daugianaris $P(x)$ turi sveikus koeficientus.

Jei $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$ ir $n \neq -1$, tai $n^{44}+n+1>n^2+n+1$. Todėl skaičiaus $n^{44}+n+1$ daliklis n^2+n+1 nelygus nei vienetui, nei pačiam skaičiui.

Uždavinys. *Išskaidykite dauginamaisiais daugianarius*

$$x^5+x+1, \quad x^{10}+x^5+1, \quad x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1.$$

Čia mums tinka ta pati idėja, kuria vadovavomės, spręsdami praeitą uždavinį. Jei α yra kvadratinio trinario x^2+x+1 šaknis, tai $\alpha^3=1$, o tokiu atveju

$$\alpha^5+\alpha+1=\alpha^2+\alpha+1=0,$$
$$\alpha^{10}+\alpha^5+1=\alpha+\alpha^2+1=0.$$

Vadinasi, daugianariai x^5+x+1 ir $x^{10}+x^5+1$ dalijasi iš x^2+x+1. Dalmenis galima apskaičiuoti, bet čia tuo neužsiimsime.

Daugianariui $f(x)=x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ tas pats metodas, nė kiek nepakeistas, nepritaikomas. Tačiau pastebėjus, kad

$$f(x)=\frac{x^{55}-1}{x^{11}-1},$$

kyla mintis panaudoti penktojo laipsnio šaknis iš vieneto, nelygias 1, t. y. daugianario $x^4+x^3+x^2+x+1$ šaknis. Iš tikrųjų, tas daugianaris turi keturias skirtingas šaknis. Jei α yra viena iš tų šaknų, tai $\alpha^5=1$. Todėl

$$f(\alpha)=\alpha^{44}+\alpha^{33}+\alpha^{22}+\alpha^{11}+1=$$
$$=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0.$$

Vadinasi, $f(x)$ dalijasi iš $x^4+x^3+x^2+x+1$. Dalmens koeficientų neskaičiuosime.

Uždavinys. *Ar galima daugianarį x^4+x^2+1 išreikšti dviejų daugianarių kvadratų suma?*

Įrodysime, kad kiekvieną daugianarį $f(x)$ su realiais koeficientais, kurio visos reikšmės, kai $x \in \mathbf{R}$, yra teigiamos, galima išreikšti dviejų daugianarių kvadratų suma.

Pasirašius lygybę

$$f(x) = u^2(x) + v^2(x) = (u(x) + iv(x))(u(x) - iv(x)),$$

kyla mintis daugianarį $f(x)$ išreikšti sandauga dviejų jungtinių daugianarių $u(x)+iv(x)$ ir $u(x)-iv(x)$, kurie sudaryti iš daugianarių $u(x)$ ir $v(x)$ su realiais koeficientais.

Pagal pirmą išvadą iš pagrindinės teoremos daugianarį $f(x)$ galima išskaidyti tiesiniais dauginamaisiais, o pagal išvadą iš teoremos, kurioje kalbama apie jungtinių skaičių savybes, daugianario $f(x)$ šaknis galima suskirstyti į jungtinių skaičių poras *:

$$f(x) = a_0((x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_s))((x-\overline{\alpha}_1)\ldots(x-\overline{\alpha}_s)) =$$
$$= a_0 g(x) h(x).$$

Daugianariai $g(x)$ ir $h(x)$ turi kompleksinius koeficientus, be to, vienodų x laipsnių koeficientai yra jungtiniai skaičiai. Vadinasi, jei daugianario $g(x)$ realiąją dalį atskirsime nuo menamosios, t. y. jį išreikšime suma

$$g(x) = u(x) + iv(x),$$

kurios dėmenys $u(x)$ ir $v(x)$ turi realius koeficientus, tai daugianaris $h(x)$ bus lygus $u(x)-iv(x)$. Tuomet

$$f(x) = a_0(u(x) + iv(x))(u(x) - iv(x)) =$$
$$= a_0((u^2(x) + v^2(x)),$$

todėl ieškomoji daugianario $f(x)$ išraiška bus šitokia:

$$f(x) = (\sqrt{a_0}u(x))^2 + (\sqrt{a_0}v(x))^2.$$

(Aišku, $a_0>0$, nes priešingu atveju $f(x)$ reikšmės, kai x pakankamai didelis, būtų neigiamos).

Išnagrinėsime dar keletą uždavinių, susijusių su Vijetos teoremos pritaikymu. Juos spręsdami, remsimės lengvai patikrinamomis tapatybėmis

$$(x_1+\ldots+x_n)^2 = x_1^2+\ldots+x_n^2+2(x_1x_2+\ldots+$$
$$+x_1x_n+\ldots+x_{n-1}x_n), \qquad (3)$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=$$
$$=(x+y+z)((x+y+z)^2-3xy-3xz-3yz). \qquad (4)$$

---

* **Kadangi visos daugianario $f(x)$ reikšmės teigiamos, tai $f(x)$ neturi realių šaknų.** *(Vert.)*

Antra tapatybė išplaukia iš tapatybės, kurią gavome antro paragrafo 3 skyrelyje, spręsdami 5 pavyzdį.

1. *Raskite 1980-ojo laipsnio šaknų iš skaičiaus 2−i kvadratų sumą.*

Nagrinėjamas šaknis žymėkime $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n=1980)$. Tie skaičiai yra daugianario $z^n-(2-i)$ šaknys, todėl pagal Vijetos teoremą jų suma lygi nuliui. Taip pat lygi nuliui ir sandaugų po dvi šaknis suma. Tuomet iš (3) tapatybės aišku, kad tų šaknų kvadratų suma irgi lygi 0.

2. *Raskite lygties $x^3+3x^2-8x-4=0$ šaknų kubų sumą.*

Jei α, β ir γ yra tos lygties šaknys, tai pagal Vijetos teoremą

$$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta\gamma=4,$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-8.$$

Remdamiesi (4) tapatybe, apskaičiuojame tų šaknų kubų sumą:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=12+(-3)(9+24)=-87.$$

3. *Išspręskite lygčių sistemą*

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$$

Jei (α, β, γ) yra šitos lygčių sistemos sprendinys, tai iš (3) tapatybės, kai $n=3$, gauname

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=3.$$

Tuomet, remdamiesi (4) tapatybe, apskaičiuojame $\alpha\beta\gamma$:

$$\alpha\beta\gamma=1.$$

Iš sistemos pirmosios lygties matyti, kad

$$\alpha+\beta+\gamma=3.$$

Todėl, remdamiesi Vijetos teorema, teigiame, kad α, β ir γ yra lygties $t^3-3t^2+3t-1=0$ šaknys. Šios lygties kairioji pusė lygi $(t-1)^3$, todėl visos trys lygties šaknys lygios 1.

Vadinasi, $\alpha=\beta=\gamma=1$. Lengva patikrinti, kad trejetas (1, 1, 1) tenkina pradinę sistemą, todėl jis yra vienintelis jos sprendinys.

4. *Skaičiai a, b ir c susiję lygybe*

$$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{e}.$$

Įrodykite, kad du kurie nors iš jų yra vienas kitam priešingi skaičiai.

Pateiktą skaičių a, b ir c priklausomybę lengva pakeisti šitokia:

$$abc=(a+b+c)(ab+ac+bc). \quad (5)$$

Tarkime, kad a, b ir c yra kubinės lygties

$$t^3+pt^2+qt+r=0 \quad (6)$$

šaknys. Tuomet, remdamiesi Vijetos teorema, (5) lygybę galime pakeisti lygybe $-r=(-p)q$. Todėl iš (6) lygties gauname lygtį

$$(t+p)(t^2+q)=0.$$

Vadinasi, viena (6) lygties šaknis lygi $-p$. Jei, pavyzdžiui, $c=-p$, tai $c=a+b+c$, arba $a+b=0$, o tai ir reikėjo įrodyti.

Pratimai

85. Išskaidykite tiesiniais dauginamaisiais:

a) x^4+4; b) $x^8+4x^6+4x^2+16$; c) $x^{12}+x^6+1$.

86. Išskaidykite tiesiniais ir kvadratiniais dauginamaisiais su realiais koeficientais:

a) x^2+4; c) x^4+x^2+1;
b) x^6+27; d) x^4-x^2+1.

87. Raskite visas kompleksinių skaičių p ir q poras, kad daugianaris z^3+i dalytųsi iš daugianario z^2+pz+q.

88. Kokios turi būti a ir m reikšmės, kad daugianaris $x^{2m}+$ $+ax^m+1$ dalytųsi iš x^2+1?

89. Kokios turi būti m reikšmės, kad daugianaris $x^{2m}+x^m+1$ dalytųsi iš x^2+x+1?

90. Kokios turi būti m ir n reikšmės, kad daugianaris x^m+1 dalytųsi iš x^n+1?

91. Įrodykite, kad reiškinio $n^{26}+n+1$ reikšmė, kai n — bet kuris nelygus 1 natūrinis skaičius, yra sudėtinis skaičius.

92. Raskite visus realius skaičius λ, kad viena lygties x^3- $-7x+\lambda=0$ šaknis būtų lygi dvigubai kitai tos lygties šakniai.

93. Dviejų lygties $x^3-2x^2-5x+\lambda=0$ šaknų suma lygi 1. Raskite λ ir išspręskite tą lygtį.

94. Įrodykite, kad daugianaris $x^{39}+(x^2+x+1)(1-x^{13})x^{12}-1$ dalijasi iš $x^6-x^5-x^4+x^2+x-1$.

95. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{23}{15}, \\ xy+xz+yz=23. \end{cases}$$

96. Įrodykite, kad daugianario $x^{105}-9$ neįmanoma išskaidyti į du dauginamuosius su sveikais koeficientais.

97. Jei skaičių a, b ir c suma lygi nuliui, tai

$$a^2(b+c)^2+b^2(a+c)^2+c^2(a+b)^2+$$
$$+(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)=0.$$

Įrodykite.

2. Plokštumos poslinkių klasifikavimas. Šiame skyrelyje pritaikysime kompleksinius skaičius svarbiam geometrijos klausimui spręsti — visiems plokštumos poslinkiams apibūdinti.

Tarkime, kad f yra kuris nors plokštumos poslinkis. Primename, kad poslinkiu vadinamas plokštumos atvaizdis į tą pačią plokštumą, nekeičiantis atstumų, t. y. atstumas tarp bet kurių dviejų taškų lygus atstumui tarp jų vaizdų.

Plokštumoje sudarykime koordinačių sistemą. Tuomet poslinkis f kiekvienam kompleksiniam skaičiui z priskirs skaičių $f(z)$; be to, atstumas tarp bet kurių taškų z ir t bus lygus atstumui tarp jų vaizdų $f(z)$ ir $f(t)$. Pagal kompleksinių skaičių skirtumo geometrinę prasmę atstumas nuo z iki t lygus $|z-t|$, o atstumas nuo $f(z)$ iki $f(t)$ lygus $|f(z)-f(t)|$. Vadinasi, atvaizdis f turi šitokią savybę: esant bet kokiems z, $t \in \mathbf{C}$,

$$|f(z)-f(t)|=|z-t|. \qquad (7)$$

Ši savybė faktiškai yra poslinkio apibrėžimas, tik išreikštas kompleksiniais skaičiais.

Taigi tarkime, kad kompleksinio kintamojo funkcija $f(z)$ atitinka (7) sąlygą. Įrodysime, kad $f(z)$ iš tikrųjų yra labai paprasta funkcija. Tam reikalui, kad būtų paprasčiau, kartais remsimės ne tik kompleksiniais skaičiais, bet ir paprastais geometriniais samprotavimais, nors galėtume apsieiti be jų ir išvesti „grynai kompleksiškai“.

Pirmiausia išnagrinėsime atvejį, kai funkcija $f(z)$ turi du nejudamus taškus 0 ir 1, t. y.

$$f(0)=0, \ f(1)=1. \qquad (8)$$

Tuomet iš (7) lygybės, vietoj t parašę 0 ir 1, gauname tapatybes

$$|f(z)|=|z|, \ |f(z)-1|=|z-1|. \qquad (9)$$

Pasirinkime tokį tašką $z_0 \in \mathbf{C}$, kad $f(z_0) \neq z_0$. Pagal (9) sąlygą

$$|f(z_0)-0|=|z_0-0|, \ |f(z_0)-1|=|z_0-1|.$$

Iš tų lygybių aišku, kad taškai 0 ir 1 yra vienodai nutolę nuo taškų z_0 ir $f(z_0)$. Vadinasi, tiesė, einanti per taškus 0 ir 1, t. y. abscisių ašis, yra atkarpos, jungiančios taškus z_0 ir $f(z_0)$, vidurio statmuo. Kitaip sakant, taškai z_0 ir $f(z_0)$ yra simetriški abscisių ašies atžvilgiu, o tai reiškia, kad $f(z_0)=\bar{z}_0$.

Įrodėme štai ką: jei $f(z)\neq z$, tai $f(z)=\bar{z}$, t. y. f tašką z arba palieka vietoje, arba atvaizduoja į jungtinį tašką. Dabar įrodysime bendresnį teiginį: *arba visi taškai lieka vietoje, t. y. f yra tapatusis atvaizdis $z\to z$, arba visi taškai atvaizduojami į jungtinius, t. y. f yra atvaizdis $z\to\bar{z}$.*

Jei skaičius z realus, tai, kaip įrodėme, $f(z)=z=\bar{z}$, todėl toliau nagrinėsime tik menamuosius skaičius z. Tarkime, kad yra du menamieji skaičiai z ir t, kurių pirmasis yra nejudamas, o antrasis atvaizduojamas į jungtinį: $f(z)=z$, $f(t)=\bar{t}$. Iš (7) sąlygos gauname lygybę

$$|z-\bar{t}|=|z-t|,$$

kuri rodo, kad taškas z priklauso atkarpos $t\bar{t}$ vidurio statmeniui. Kadangi tas statmuo yra abscisių ašis, tai išeina, kad z yra realus skaičius, o tai prieštarauja prielaidai.

Vadinasi, arba visi menamieji taškai yra nejudami, arba visi jie atvaizduojami į jungtinius taškus. Teiginys įrodytas.

Apibendrinsime tai, kas buvo pasakyta: *jei plokštumos poslinkis f turi du nejudamus taškus* 0 *ir* 1, *tai f yra arba tapatusis atvaizdis $z\to z$, arba atvaizdis $z\to\bar{z}$.*

Dabar tarsime, kad f yra bet kuris plokštumos poslinkis. Sudarysime naują atvaizdį, apibrėždami jį formule

$$g(z)=\frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}.$$

Atsižvelgę į (7) lygybę, gauname

$$|f(1)-f(0)|=1. \qquad (10)$$

Todėl trupmenos vardiklis nelygus nuliui. Pasirodo, kad atvaizdis g irgi yra plokštumos poslinkis; iš tikrųjų:

$$|g(z)-g(t)|=\left|\frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}-\frac{f(t)-f(0)}{f(1)-f(0)}\right|=$$
$$=\left|\frac{f(z)-f(t)}{f(1)-f(0)}\right|=\frac{|f(z)-f(t)|}{|f(1)-f(0)|}=\frac{|z-t|}{1}=|z-t|.$$

Lengva patikrinti, kad $g(0)=0$ ir $g(1)=1$, t. y. poslinkis g tenkina (8) sąlygą — turi nejudamus taškus 0 ir 1. Vadinasi, poslinkiui g galima taikyti gautąją išvadą: esant bet kuriam $z\in\mathbf{C}$, arba $g(z)=z$, arba $g(z)=\bar{z}$.

Trumpindami užrašus, skaičių $f(0)$ žymėsime raide b. Skaičiaus $f(1)-f(0)$ modulis, kaip nurodyta (10) lygybe, lygus 1, todėl tas skaičius išreiškiamas trigonometrine forma $\cos\alpha+$ $+i\sin\alpha$ $(0\leqslant\alpha<2\pi)$, vietoj kurios — irgi tik dėl trumpumo — vartosime „rodiklinę“ formą $e^{i\alpha}$. Tuomet iš atvaizdžio g apibrėžimo gausime lygybę $f(z)=g(z)e^{i\alpha}+b$. Vadinasi, atvaizdis f išreiškiamas dviem formulėmis:

$$f(z)=ze^{i\alpha}+b,\quad f(z)=\bar{z}e^{i\alpha}+b.$$

Tas formules ir nagrinėsime geometriniu požiūriu.

Pirmiausia išnagrinėsime atvaizdį

$$f(z)=ze^{i\alpha}+b.$$

Iš formulės matyti, kad, norint gauti $f(z)$, reikia skaičių z padauginti iš $e^{i\alpha}$ ir prie rezultato pridėti b. Dauginimas iš $e^{i\alpha}$ geometriniu požiūriu reiškia posūkį apie tašką O kampu α, o skaičiaus b pridėjimas — lygiagretųjį postūmį $\vec{b}=\overrightarrow{Ob}$. Vadinasi, šiuo atveju poslinkis f yra posūkio ir postūmio kompozicija.

To geometrinio rezultato gali ir užtekti, bet pasirodo, kad poslinkį f galima apibūdinti dar paprasčiau. Iš tikrųjų, kai $\alpha=0$, f yra postūmis, o kai $\alpha\neq 0$, — posūkis kampu α, tik ne apie tašką O, o apie tam tikrą tašką z_0. Norint rasti to posūkio centrą, reikia prisiminti, kad posūkio centras z_0 yra nejudamas poslinkio f taškas, t. y. tenkina lygtį $f(z)=z$, arba

$$ze^{i\alpha}+b=z.$$

Kadangi $\alpha\neq 0$, tai $e^{i\alpha}\neq 1$. Todėl ši lygtis turi vienintelį sprendinį $z_0=\frac{b}{1-e^{i\alpha}}$. Įsitikinsime, kad f yra posūkis apie tašką z_0.

Tuo tikslu, laikinai pamiršę poslinkį f, išsiaiškinkime, kaip kompleksiniais skaičiais reiškiamas posūkis h apie tašką z_0 kampu α. Lengva pastebėti (16 pav.), kad

$$h(z)-z_0=(z-z_0)e^{i\alpha},$$

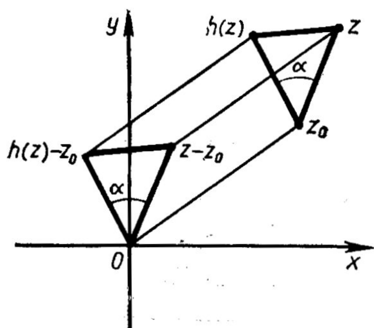
todėl $h(z)=(z-z_0)e^{i\alpha}+z_0$.

Kadangi reiškiniui $f(z)$ irgi galima suteikti analogišką pavidalą:

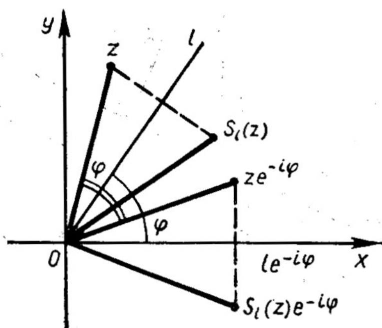
$$f(z)=\left(z-\frac{b}{1-e^{i\alpha}}\right)e^{i\alpha}+\frac{b}{1-e^{i\alpha}},$$

tai f iš tikrųjų yra posūkis apie tašką z_0 kampu α.

Vadinasi, aptartu atveju poslinkis f yra arba lygiagretusis postūmis (kai $\alpha=0$), arba posūkis apie tašką z_0 kampu α (kai $\alpha\neq 0$).



16 pav.



17 pav.

Dabar išnagrinėsime antrąjį poslinkį

$$f(z)=\bar{z}e^{i\alpha}+b.$$

Lengva pastebėti, kad šiuo atveju poslinkis f yra ašinės simetrijos abscisių ašies atžvilgiu, posūkio apie tašką O kampu α ir lygiagrečiojo postūmio $\vec{b}$ kompozicija. Kaip ir pirmuoju atveju, poslinkį f galima apibūdinti paprasčiau, nors, tiesą sakant, šiuo atveju nepavyks visiškai išvengti kompozicijos.

Pirmiausia išsiaiškinsime, kaip kompleksiniais skaičiais išreiškiama ašinė simetrija S_l, kai simetrijos ašis l eina per koordinačių pradžią. Jei tiesė l su abscisių ašimi sudaro kampą φ (17 pav.), tai, pasukta kampu $-\varphi$ apie tašką O, ji sutampa su abscisių ašimi. Taško $S_l(z)$ vaizdas, gautas šiuo posūkiu, bus jungtinis taško z vaizdui, todėl bus teisinga lygybė

$$S_l(z)\,e^{-i\varphi}=\overline{ze^{-i\varphi}},$$

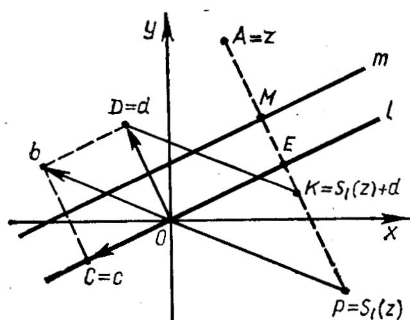
iš kurios gauname

$$S_l(z)=\overline{ze^{-i\varphi}}\cdot e^{i\varphi}=\bar{z}e^{i\varphi}\cdot e^{i\varphi}=\bar{z}e^{2i\varphi}. \qquad (11)$$

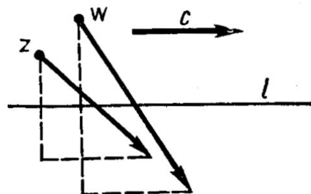
Dabar aišku, kad poslinkis f yra kompozicija, gauta iš ašinės simetrijos $S_l(z)$, kurios ašis l eina per tašką O, su abscisių ašimi sudarydama kampą $\varphi=\frac{\alpha}{2}$, ir lygiagrečiojo postūmio $\vec{b}$. Kai $b=0$, turime „gryną“ simetriją, o atvejį $b\neq0$ išnagrinėsime detaliau.

Vektorių $\vec{b}$ išreikšime tokių vektorių $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ suma, kad $OC\parallel l$, $OD\perp l$ (18 pav.). Tuomet

$$f(z)=\bar{z}e^{i\alpha}+d+c.$$



18 pav.



19 pav.

Pirma išsiaiškinsime, koks poslinkis reiškiamas formule

$$h(z) = \bar{z}e^{i\alpha} + d.$$

Kaip jau įsitikinome, tai yra ašinės simetrijos $S_l(z)$, kai $(\widehat{l, Ox}) = \frac{\alpha}{2}$, ir lygiagrečiojo postūmio $\vec{d}$ ašiai l statmena kryptimi kompozicija.

Įrodysime, kad šita kompozicija yra ašinė simetrija, kurios ašis m yra lygiagreti tiesei l ir eina per tašką $\frac{d}{2}$.

Vadinasi, reikia įrodyti, kad taškas $S_l(z)+d$ yra simetriškas taškui z tiesės m atžvilgiu. Kadangi tiesė AK, be abejo, statmena tiesei m ir, be to,

$$|KM| = |PM| - |PK| = |PE| + (|EM| - |PK|) =$$
$$= |PE| - |EM| = |AE| - |EM| = |AM|,$$

tai suformuluotas teiginys jau įrodytas.

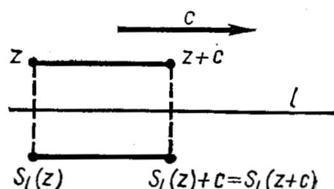
Vadinasi, nagrinėjamasis poslinkis f yra kompozicija, gauta iš ašinės simetrijos, kurios ašis m eina per tašką $\frac{d}{2}$, su abscisių ašimi sudarydama kampą $\frac{\alpha}{2}$, ir lygiagrečiojo postūmio $\vec{c}$ ašies m kryptimi. Tas poslinkis vadinamas *slenkamąja simetrija;* pavadinimo kilmė aiški iš 19 paveikslo.

Pabrėžiame, kad slenkamoji simetrija nepriklauso prie anksčiau išvardytų „mokyklinių" poslinkių tipų. Šis teiginys išplaukia, pavyzdžiui, iš to, kad slenkamoji simetrija neturi nejudamų taškų, todėl ji negali būti nei posūkis, nei ašinė simetrija. Ji ne-

gali būti nė lygiagretusis postūmis: jei $S_l \circ \vec{c}$ būtų lygiagretusis postūmis, t. y. $S_l \circ \vec{c} = \vec{p}$, tai išeitų, kad

$$S_l = S_l \circ \vec{c} \circ (-\vec{c}) = \vec{p} \circ (-\vec{c}) = \vec{p} - \vec{c};$$

tai reikštų, kad poslinkis S_l pats yra lygiagretusis postūmis, o tai netiesa.



20 pav.

Iš slenkamosios simetrijos savybių pasakysime tik tai, kad simetrijos S_l ir postūmio $\vec{c}$ kompozicija nepriklauso nuo tvarkos:

$$S_l \circ \vec{c} = \vec{c} \circ S_l. \qquad (12)$$

Nors tą teiginį galima įrodyti griežtai, bet mums pakaks geometrinio paaiškinimo (20 pav.).

Susumuodami gautuosius rezultatus, pabrėšime, kad tapatusis poslinkis yra lygiagretusis postūmis $\vec{0}$. Todėl galima suformuluoti pagrindinę poslinkių klasifikavimo teoremą.

T e o r e m a. ***Yra šie poslinkių tipai: tapatusis, nenulinis lygiagretusis postūmis, posūkis kampu, nelygiu 0, ašinė simetrija ir slenkamoji simetrija.***

Sudarytą poslinkių klasifikaciją taikysime uždaviniams spręsti.

1. *Kiek nejudamų taškų gali turėti poslinkis?*

Šio uždavinio sprendimas visiškai aiškus: visi tapačiojo poslinkio taškai yra nejudami; posūkis nenuliniu kampu turi tik vieną nejudamą tašką; ašinės simetrijos nejudami taškai sudaro tiesę; lygiagretusis postūmis ir slenkamoji simetrija neturi nejudamų taškų.

Vadinasi, poslinkis gali arba visiškai neturėti nejudamų taškų, arba turėti vieną nejudamą tašką, arba turėti nejudamų taškų tiesę, arba turėti visus nejudamus taškus.

Iš šio uždavinio išplaukia keli daliniai teiginiai; pavyzdžiui, jei du poslinkio f taškai yra nejudami, tai f yra arba ašinė simetrija, arba tapatusis poslinkis; jei yra trys nejudami taškai, nepriklausą vienai tiesei, tai f — tapatusis poslinkis.

Išspręsime pirmo paragrafo 9 uždavinį.

2. *Poslinkiu f taškas A atvaizduojamas į tašką B, o taškas B — į tašką A. Raskite bet kurio plokštumos taško vaizdą, gaunamą poslinkiu f.*

Žinoma, lengva nurodyti du poslinkius, atitinkančius uždavinio sąlygą — tai ašinė simetrija, kurios ašis l yra atkarpos AB vidu-

rio statmuo, ir centrinė simetrija, kurios centras O yra atkarpos AB vidurys. Tačiau ar nėra kitų poslinkių, turinčių tą pačią savybę?

Įrodysime, kad galimi uždavinio sprendiniai yra tik poslinkiai S_l ir Z_O. Pagal uždavinio sąlygą poslinkis f turi dvi savybes:

$$f(A)=B,\ f(B)=A.$$

Toms lygybėms pritaikę atvaizdį f, gauname lygybes

$$f(f(A))=f(B)=A,\ f(f(B))=f(A)=B,$$

iš kurių aišku, kad kompozicija $f\circ f$ turi du nejudamus taškus A ir B. Remdamiesi pirmo uždavinio rezultatais, darome išvadą, kad $f\circ f$ yra arba ašinė simetrija, arba tapatusis atvaizdis.

Atsižvelgdami į pateiktą poslinkių klasifikaciją, išnagrinėsime atskirus atvejus.

a) Jei f yra posūkis, tai $f\circ f$ — taip pat posūkis; todėl $f\circ f$ nėra ašinė simetrija. Vadinasi, $f\circ f$ — tapatusis atvaizdis. Bet taip gali būti tik tuo atveju, kai posūkio kampas lygus π, o posūkio centras šiuo atveju, savaime aišku, yra O. Kitaip sakant, f yra centrinė simetrija Z_0.

b) Jei f — lygiagretusis postūmis, nelygus $\vec{0}$, tai $f\circ f$ — irgi lygiagretusis postūmis, nelygus $\vec{0}$. Vadinasi, šiuo atveju f neatitinka uždavinio sąlygų.

c) Jei f — ašinė simetrija, tai $f\circ f$ — tapatusis atvaizdis. Aišku, kad tos simetrijos ašis — tiesė l — yra atkarpos AB vidurio statmuo.

d) Pagaliau tarkime, kad f yra slenkamoji simetrija $S_m\circ\vec{a}$. Tuomet, remdamiesi (12) lygybe, gauname

$$f\circ f=S_m\circ\vec{a}\circ S_m\circ\vec{a}=S_m\circ S_m\circ\vec{a}\circ\vec{a}=E\circ\overrightarrow{2a}=\overrightarrow{2a}.$$

Vadinasi, $f\circ f$ šiuo atveju nėra nei ašinė simetrija, nei tapatusis atvaizdis, t. y. neatitinka uždavinio sąlygos.

3. *Koks poslinkis gali būti dviejų ašinių simetrijų S_l ir S_m kompozicija?*

Pirma išnagrinėsime atvejį, kai tiesės l ir m susikerta taške O. Tą tašką laikykime koordinačių pradžia, o tiesę l — abscisių ašimi. Tarkime, kad α yra kampas, kurį tiesė m sudaro su tiese l. Tuomet $S_l(z)=\bar{z}$, o simetrija S_m, remiantis (11) formule, išreiškiama formule $S_m(z)=\bar{z}e^{2i\alpha}$. Kadangi

$$(S_l\circ S_m)(z)=S_l(S_m(z))=\overline{\bar{z}e^{2i\alpha}}=ze^{-2i\alpha},$$

tai kompozicija $S_l\circ S_m$ yra posūkis apie tašką O kampu -2α.

Jeigu tiesės l ir m yra lygiagrečios, tai, tiesę l vėl laikydami abscisių ašimi, o bet kurį jos tašką O — koordinačių pradžia, kaip ir anksčiau, matysime, kad $S_l(z)=\bar{z}$. Pritaikę atvaizdį $-\vec{b}$ (21 pav.), gausime

$$\overline{z-b}=S_m(z)-b.$$

Kadangi b yra grynai menamas skaičius, t. y. $\bar{b}=-b$, tai

$$\bar{z}+b=S_m(z)-b.$$

Vadinasi,

$$S_m(z)=\bar{z}+2b. \tag{13}$$

Tačiau tokiu atveju

$$(S_l\circ S_m)(z)=S_l(S_m(z))=\overline{\bar{z}+2b}=z-2b.$$

t. y. $S_l\circ S_m$ yra lygiagretusis postūmis $-2\vec{b}$.

4. *Koks poslinkis gali būti ašinės simetrijos S_l ir posūkio R_O^α kompozicija?*

Iš pradžių tarkime, kad $O\in l$. Jei tašką O laikome koordinačių pradžia, o tiesę l — abscisių ašimi, tai

$$S_l(z)=\bar{z},\quad R_O^\alpha(z)=ze^{i\alpha},$$

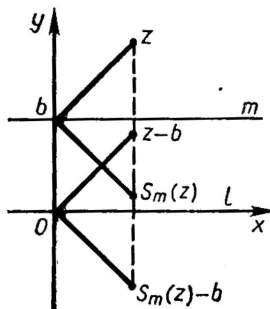
$$(S_l\circ R_O^\alpha)(z)=S_l(R_O^\alpha(z))=\overline{ze^{i\alpha}}=\bar{z}e^{-i\alpha}.$$

Tai reiškia, kad $S_l\circ R_O^\alpha$ irgi yra ašinė simetrija, kurios ašis m su tiese l sudaro kampą $-\frac{\alpha}{2}$ (22 pav.).

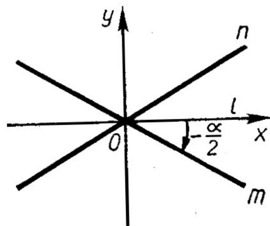
Analogiškai

$$(R_O^\alpha\circ S_l)(z)=R_O^\alpha(S_l(z))=\bar{z}e^{i\alpha},$$

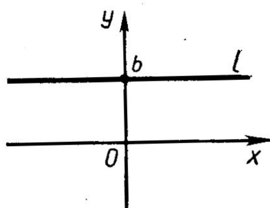
todėl $R_O^\alpha\circ S_l$ irgi yra ašinė simetrija, tik jos ašis yra tiesė n.



21 pav.



22 pav.



23 pav.

Jei tarsime, kad $O \notin l$, tai, abscisių ašimi laikydami tiesę, lygiagrečią tiesei l (23 pav.), gausime $R_O^\alpha(z) = ze^{i\alpha}$. Remdamiesi (13) lygybe, rašome

$$S_l(z) = \bar{z} + 2b.$$

Todėl

$$(S_l \circ R_O^\alpha)(z) = S_l(R_O^\alpha(z)) = \overline{ze^{i\alpha}} + 2b = \bar{z}e^{-i\alpha} + 2b,$$
$$(R_O^\alpha \circ S_l)(z) = R_O^\alpha(S_l(z)) = (\bar{z} + 2b)e^{i\alpha} = \bar{z}e^{i\alpha} + 2be^{i\alpha}.$$

Vadinasi, kompozicijos $S_l \circ R_O^\alpha$ ir $R_O^\alpha \circ S_l$ yra slenkamosios simetrijos (nes $b \neq 0$ ir $OB \perp l$).

Spręsdami 3 uždavinį, įsitikinome, kad dviejų ašinių simetrijų kompozicija yra arba posūkis, arba lygiagretusis postūmis. Pasirodo, kad kiekvieną posūkį apie centrą O kampu α galima išreikšti kompozicija, sudaryta iš dviejų ašinių simetrijų, kurių ašys susikerta taške O, sudarydamos kampą $\frac{\alpha}{2}$. Panašiai kiekvieną lygiagretųjį postūmį $\vec{b}$ galima išreikšti kompozicija dviejų ašinių simetrijų, kurių ašys yra tarpusavyje lygiagrečios, būtent, statmenos atkarpai Ob ir nutolusios viena nuo kitos atstumu $\frac{|b|}{2}$.

Slenkamoji simetrija pagal savo apibrėžimą yra ašinės simetrijos ir lygiagrečiojo postūmio kompozicija, todėl ji yra trijų ašinių simetrijų kompozicija. Jei susitarsime, kad tapatusis poslinkis yra 0 ašinių simetrijų kompozicija, tai galėsime sudaryti naują poslinkių klasifikaciją: *kiekvienas poslinkis yra* 0, 1, 2 *arba* 3 *ašinių simetrijų kompozicija.*

Baigdami šį skyrelį, išnagrinėsime dar vieną svarbų klausimą — poslinkių užrašymą koordinatine forma. Jau įrodėme, kad bet kuris plokštumos poslinkis reiškiamas viena iš dviejų formulių:

$$f(z) = ze^{i\alpha} + b, \quad f(z) = \bar{z}e^{i\alpha} + b.$$

Jei $z = x + iy$, $f(z) = x' + iy'$, $b = c + id$, tai pirmu atveju gaunama lygybė

$$x' + iy' = (x + iy)(\cos\alpha + i\sin\alpha) + c + id,$$

iš kurios galima sudaryti sistemą

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + c, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + d. \end{cases} \qquad (14)$$

Antruoju atveju analogiškai gauname sistemą

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + c, \\ y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + d. \end{cases} \qquad (15)$$

(14) ir (15) formulės rodo, kaip, žinant plokštumos taško koordinates x ir y, apskaičiuoti to taško vaizdo koordinates x' ir y'. Tos formulės yra svarbios analizinėje geometrijoje. Be to, remdamiesi jomis, dar kartą galime suklasifikuoti poslinkius pagal nejudamų taškų skaičių. Tam reikalui, pavyzdžiui, pirmuoju atveju tiriame, kiek sprendinių turi dviejų tiesinių lygčių su dviem kintamaisiais sistema

$$\begin{cases} x = x\cos\alpha - y\sin\alpha + c, \\ y = x\sin\alpha + y\cos\alpha + d. \end{cases}$$

Iš tokių sistemų sprendimo praktikos žinote (griežtai tai įrodoma algebroje), kad šita sistema arba visiškai neturi sprendinių, arba turi vieną sprendinį, arba sprendinių „tiesę“, arba sprendinių „plokštumą“. Tas rezultatas visiškai sutampa su padarytomis išvadomis.

Pratimai

98. Raskite tiesės $y=2x-1$ vaizdą, gaunamą transformacija $z\to(1+i)z+i$.

99. Raskite skritulio $|z-i|\leqslant 1$ vaizdus, gaunamus transformacijomis: a) $z\to i\bar{z}-1$; b) $z\to 3z-i$; c) $z\to 2iz+i-2$.

100. Duoti du posūkiai: $R_i^{\frac{\pi}{2}}$ ir $R_{1+i}^{\frac{\pi}{3}}$. Užrašykite tas transformacijas atvaizdžio $z\to az+b$ pavidalu ir išsiaiškinkite, kokios plokštumos transformacijos yra $R_i^{\frac{\pi}{2}}\circ R_{1+i}^{\frac{\pi}{3}}$ ir $R_{1+i}^{\frac{\pi}{3}}\circ R_i^{\frac{\pi}{2}}$.

101. Įrodykite, kad transformacija $z\to\frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z}$ yra ašinė simetrija, ir raskite jos ašį.

102. Raskite: a) posūkio 30° kampu apie tašką i ir posūkio 60° kampu apie tašką $1-i$ kompoziciją; b) posūkio 90° kampu apie tašką $2+i$ ir lygiagrečiojo postūmio $\vec{b}=\overrightarrow{0(1+i)}$ kompoziciją; c) posūkio apie tašką z_0 kampu α ir posūkio apie tašką z_1 kampu β kompoziciją; d) simetrijų, kurių ašys yra tiesės $y=x+1$ ir $y=2x-2$, kompoziciją; e) posūkio 90° kampu apie tašką $1-i$ ir lygiagrečiojo postūmio $\overrightarrow{2i}$ kompoziciją.

103. Koks plokštumos poslinkis gali būti dviejų slenkamųjų simetrijų kompozicija?

104. Išreikškite atvaizdžio $z\to a\bar{z}+b$ pavidalu: a) simetriją tiesės $y=x+1$ atžvilgiu; b) slenkamąją simetriją, kuri tašką $1+i$ atvaizduoja į tašką $1-i$, o tiesę $y=1-x$ — į tą pačią tiesę;

c) slenkamosios simetrijos, nurodytos užduotyje b), ir posūkio 90° kampu apie tašką i kompoziciją.

105. Raskite visas plokštumos transformacijas, kurių kompozicija su 104 uždavinio slenkamąja simetrija yra ašinė simetrija.

106. Įrodykite, kad plokštumos transformacija $z \to az+b$, kai $|a| \neq 1$ ir $a \neq 0$, yra homotetijos ir posūkio kompozicija. Raskite būtinas ir pakankamas sąlygas, kuriomis ši transformacija yra homotetija.

107. Raskite tieses, kurios transformacija $z \to a\bar{z}$, $|a| \neq 1$, atvaizduojamos į jas pačias.

108. Įrodykite, kad transformacija $z \to a\bar{z}+b$, $|a| \neq 1$, yra ašinės simetrijos ir homotetijos kompozicija. Raskite simetrijos ašį ir homotetijos centrą bei koeficientą.

109. Sakoma, kad plokštumos transformacijos $z \to f(z)$ ir $z \to g(z)$ komutuoja, kai $f \circ g = g \circ f$. Raskite visus poslinkius, kurie komutuoja su šiomis transformacijomis: a) $z \to iz+2$; b) $z \to i\bar{z}-1$.

110. Raskite $z \to a\bar{z}+b$ tipo transformacijas, kurios komutuoja su transformacija $z \to iz-1$.

111. Taisyklingo trikampio viršūnės yra vieneto kubinės šaknys. Raskite visus plokštumos poslinkius, kuriais šis trikampis atvaizduojamas į jį patį.

3. Rekurentinės sekos. Nagrinėsime tik antros eilės rekurentines sekas, t. y. sekas, kurių kiekvienas narys, pradedant trečiuoju, išreiškiamas dviem pirmesniais nariais. Nusakant tokią seką, aišku, reikia nurodyti du pirmuosius jos narius ir rekurentinę formulę

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n \; (q \neq 0\,^*,\; n \geqslant 1). \qquad (16)$$

Mūsų tikslas — sudaryti sekos (u_n) n-tojo nario formulę, kitaip sakant, sudaryti pačią seką (u_n). Kadangi seka (u_n) yra natūrinio argumento funkcija, tai (16) lygybę galima laikyti lygtimi nežinomos funkcijos atžvilgiu, t. y. funkcine lygtimi. Spręsime tą funkcinę lygtį, atsižvelgdami į pradines sąlygas $u_1 = a$, $u_2 = b$.

Jau 1 paragrafe įsitikinome, kad seka (λ^n) yra tos lygties sprendinys tada ir tik tada, kai λ yra kvadratinės lygties $x^2 - px - q = 0$ šaknis. Šita lygtis vadinama *sekos* (u_n) *charakteristine lygtimi*. Ji turi dvi kompleksines šaknis: arba dvi skirtingas šaknis α ir β, arba vieną dvikartę šaknį α.

---

* Sąlyga $q \neq 0$ rodo, kad (u_n) nėra pirmos eilės seka.

Pirma išnagrinėsime atvejį, kai charakteristinė lygtis turi dvi skirtingas šaknis. Tuomet lygtis jau turi du sprendinius — sekas (α^n) ir (β^n). Tačiau tai toli gražu ne viskas: pasirodo, kad seka, kurios bendrasis narys yra

$$u_n = c\alpha^n + d\beta^n \quad (c, d \in \mathbf{C}) \tag{17}$$

(tų dviejų sekų *tiesinis darinys*), irgi yra (16) lygties sprendinys. Iš tiesų, kadangi

$$\alpha^{n+2} = p\alpha^{n+1} + q\alpha^n, \quad \beta^{n+2} = p\beta^{n+1} + q\beta^n,$$

tai

$$u_{n+2} = c\alpha^{n+2} + d\beta^{n+2} = c(p\alpha^{n+1} + q\alpha^n) + \\ + d(p\beta^{n+1} + q\beta^n) = p(c\alpha^{n+1} + d\beta^{n+1}) + \\ + q(c\alpha^n + d\beta^n) = pu_{n+1} + qu_n.$$

Vadinasi, turime rinkinį sekų, tenkinančių (16) lygtį. Kiekvienas tos lygties sprendinys sutampa su to rinkinio lygtimi, atitinkamai parinkus konstantas c ir d. Šis teiginys faktiškai išplaukia iš tolesnio samprotavimo.

Dabar mūsų tikslas — tame rinkinyje rasti seką, kuri atitinka nurodytąsias pradines sąlygas $u_1 = a$, $u_2 = b$. Šios dvi lygybės reiškia, kad

$$c\alpha + d\beta = a, \quad c\alpha^2 + d\beta^2 = b. \tag{18}$$

Užtenka įsitikinti, kad sudaryta dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais c ir d sistema turi bent vieną sprendinį. Pirmą lygtį padauginę iš β ir iš gautos lygties atėmę antrąją, turime

$$c\alpha(\beta - \alpha) = a\beta - b.$$

Analogiškai galima išvesti ir kitą lygybę

$$d\beta(\alpha - \beta) = a\alpha - b.$$

Kadangi $q \neq 0$, tai skaičiai α ir β nelygūs nuliui. Be to, turėdami mintyje, kad $\alpha - \beta \neq 0$, iš paskutinių lygybių gauname

$$c = \frac{a\beta - b}{\alpha(\beta - \alpha)}, \quad d = \frac{a\alpha - b}{\beta(\alpha - \beta)}. \tag{19}$$

Vadinasi, seka (u_n), kurios bendrasis narys yra

$$u_n = c\alpha^n + d\beta^n,$$

kai skaičiai c ir d apibrėžiami (19) lygybėmis, tenkina (16) lygtį ir (18) pradinę sąlygą. Tai reiškia, kad (u_n) yra ieškomoji seka.

Čia faktiškai įrodėme, kad bet kuriomis pradinėmis sąlygomis galima rasti tokias konstantas c ir d, kad seka atitiktų tas pra-

dines sąlygas. Tačiau tai kaip tik rodo, kad kiekvieną (16) lygties sprendinį galima gauti iš (17) formulės, atitinkamai parinkus konstantas c ir d.

Kaip pavyzdį nagrinėkime 1 paragrafe pateiktą seką. Pateikiame jos sąlygas:

$$u_{n+2} = -u_n, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = -1.$$

Charakteristinė lygtis $x^2+1=0$ turi dvi šaknis: i ir $-i$, todėl

$$u_n = ci^n + d(-i)^n.$$

Remdamiesi (19) formulėmis, apskaičiuojame c ir d:

$$c = \frac{-i+1}{i(-2i)} = \frac{1-i}{2}, \quad d = \frac{i+1}{-i \cdot 2i} = \frac{1+i}{2}.$$

Vadinasi,

$$u_n = \frac{1-i}{2} i^n + \frac{1+i}{2} (-i)^n. \qquad (20)$$

Kadangi

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \frac{1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

tai

$$u_n = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(-\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Įsitikinome, kad skaičius u_n yra realus, nors iš (20) formulės to visiškai nematyti.

Žinoma, ir bendruoju atveju, kai pradinės sąlygos a ir b, o p ir q yra realieji skaičiai, iš (17) formulės turime gauti realų skaičių u_n net tuomet, kai charakteristinės lygties šaknys α ir β yra menami skaičiai. Įrodysime, kad iš tikrųjų taip yra.

Iš pradžių rasime skaičių, jungtinį skaičiui c, remdamiesi tuo, kad $\bar{a}=a$, $\bar{b}=b$, $\bar{\alpha}=\beta$, $\bar{\beta}=\alpha$:

$$\bar{c} = \overline{\frac{a\beta-b}{\alpha(\beta-\alpha)}} = \frac{\bar{a}\bar{\beta}-\bar{b}}{\bar{\alpha}(\bar{\beta}-\bar{\alpha})} = \frac{a\alpha-b}{\beta(\alpha-\beta)} = d.$$

Tačiau tokiu atveju

$$u_n = c\alpha^n + \overline{c\alpha^n} \in \mathbf{R},$$

kaip dviejų jungtinių skaičių suma.

Norėdami tiesiogiai išreikšti realųjį skaičių u_n, kaip ir ką tik spręstame pavyzdyje, tariame, kad

$$c = re^{i\gamma}, \quad \alpha = se^{i\varphi}.$$

Tuomet $\bar{c}=re^{-i\gamma}$, $\bar{\alpha}=se^{-i\varphi}$. Todėl

$$u_n=rs^n e^{i(n\varphi+\gamma))}+rs^n e^{-i(n\varphi+\gamma)}=$$
$$=2rs^n\cos(n\varphi+\gamma).$$

Ir vėl iš laipsnių gavome kosinusus!

Atvejis, kai charakteristinė lygtis $x^2-px-q=0$ turi vieną dvikartę šaknį $\alpha=\frac{p}{2}$, kompleksinių skaičių požiūriu nėra įdomus, bet, kad nagrinėjimas būtų išsamus, pasakysime, jog šiuo atveju (16) lygtį, be sprendinio (α^n), tenkina seka, kurios bendrasis narys yra $v_n=n\alpha^n$. Iš tikrųjų,

$$v_{n+2}=(n+2)\alpha^{n+2}=n(p\alpha^{n+1}+q\alpha^{n+1})+2\alpha^{n+2}=$$
$$=p(n+1)\alpha^{n+1}+qn\alpha^n+(2\alpha^{n+2}-p\alpha^{n+1})=$$
$$=pv_{n+1}+qv_n,$$

nes

$$2\alpha^{n+2}-p\alpha^{n+1}=2\alpha^{n+1}\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)=0.$$

Vadinasi, šiuo atveju, kaip ir anksčiau, turime sprendinių rinkinį

$$u_n=c\alpha^n+dn\alpha^n=(c+dn)\alpha^n,$$

iš kurio galima parinkti (16) lygties sprendinį, atitinkantį visas iš anksto nurodytas pradines sąlygas. Kaip šiuo atveju samprotaujama, detaliai neaptarsime.

Baigdami pabrėšime, kad, visiškai panašiai samprotaujant, sprendžiamas ir bendrasis uždavinys, kai rekurentinė seka yra k-tos eilės, tik pagrindžiant atitinkamus teiginius, pavyzdžiui, įrodant, kad egzistuoja konstantos, kuriomis iš sprendinių rinkinio išskiriamas atskirasis sprendinys, atitinkąs nurodytas pradines sąlygas, reikia remtis bendrąja tiesinių lygčių sistemų teorija. Dar atkreipsime dėmesį į tai, kad dažnai pasitaiko sekos, kurių rekurentinės formulės dešinėje pusėje yra dar vienas dėmuo:

$$u_{n+2}=pu_{n+1}+qu_n+r$$

(nehomogeninė lygtis). Tačiau šio tipo lygties sprendimo būdas jau nėra susijęs su mūsų pagrindiniu uždaviniu — kompleksinių skaičių taikymu, todėl to klausimo čia nenagrinėsime.

Pratimai

112. Kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ koeficientai a, b ir c — realūs skaičiai. Tarkime, kad x_1 ir x_2 yra tos lygties šaknys, o $s_n=x_1^n+x_2^n$. Įrodykite, kad $as_n+bs_{n-1}+cs_{n-2}=0$.

113. Jei x_1 ir x_2 yra kvadratinės lygties $x^2-6x+1=0$ šaknys, tai reiškinio $s_n=x_1^n+x_2^n$ reikšmė, atitinkanti kiekvieną natūrinį skaičių n, yra sveikasis skaičius, nedalus iš 5. Įrodykite.

114. Sudarykite Fibonačio sekos n-tojo nario formulę, kai $u_1=1$, $u_2=1$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$.

115. Koks turi būti n, kad Fibonačio skaičius u_n dalytųsi iš 5?

116. Raskite bendruosius rekurentinių lygčių sprendinius:

a) $u_n-4u_{n-1}+3u_{n-2}=0$;

b) $u_n-u_{n-1}+u_{n-2}=0$.

117. Jei $p^2-4q=0$, tai kiekvienas rekurentinės lygties $u_n+ +pu_{n-1}+qu_{n-2}=0$ sprendinys išreiškiamas formule $u_n= =\lambda^{n-1}(c_1n+c_2)$, kurios λ yra vienintelė charakteristinės lygties $x^2+px+q=0$ šaknis. Įrodykite.

118. Raskite visus lygties $u_n-6u_{n-1}+9u_{n-2}=0$ sprendinius.

119. Įrodykite, kad kiekviena aritmetinė progresija a_n yra rekurentinės lygties $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0$ sprendinys ir, atvirkščiai, kiekvienas tos lygties sprendinys yra aritmetinė progresija.

120. Įrodykite, kad kiekvienas rekurentinės lygties $u_n-3u_{n-1}+ +3u_{n-2}-u_{n-3}=0$ sprendinys išreiškiamas formule $u_n=c_1n^2+c_2n+ +c_3$, kurios koeficientai c_1, c_2 ir c_3 yra realūs skaičiai.

121. Kartais tenka spręsti tokį uždavinį: reikia rasti seką w_n, tenkinančią lygtį $w_n+pw_{n-1}+qw_{n-2}=a_n$, kai a_n — žinoma seka. Tarkime, kad pavyko rasti vieną tos rekurentinės lygties sprendinį b_n. Įrodykite, kad kiekvienas tos lygties sprendinys reiškiamas suma $w_n=b_n+u_n$, kurios dėmuo u_n yra homogeninės lygties $u_n+pu_{n-1}+qu_{n-2}=0$ sprendinys.

4. Diferencialinės lygtys. Taikydami kompleksinius skaičius, išnagrinėsime paskutinį 1 paragrafe iškeltą klausimą — *tiesinės diferencialinės lygties su pastoviais koeficientais* sprendimą. Primename, kad tokia lygtimi vadinama lygtis

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-2}y''+a_{n-1}y'+a_ny=g(x), \qquad (21)$$

kai y yra nežinoma funkcija, y', y'', ..., $y^{(n)}$ — jos išvestinės, $g(x)$ — žinoma funkcija, o a_1, a_2, ..., a_n — žinomi skaičiai. Dabar, susipažinus su kompleksiniais skaičiais ir pramokus kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos pradmenų, galima tarti, kad (21) lygties koeficientai yra kompleksiniai skaičiai, o y — kompleksinio kintamojo funkcija. Vis dėlto labiausiai domėsimės, suprantama, įprastinėmis „realiomis“ lygtimis.

Su diferencialinėmis lygtimis siejami du uždaviniai: rasti visus sprendinius ir rasti tokį sprendinį $y=f(x)$, kuris tenkina pradines sąlygas, t. y. lygybes

$$f(x_0)=c_0,\ f'(x_0)=c_1,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x_0)=c_{n-1},$$

kuriose $c_0, c_1 \ldots, c_{n-1}$ yra duotieji skaičiai.

Nagrinėsime tik (21) tipo homogeninę lygtį, t. y. lygtį, kurios dešinėje pusėje yra funkcija $g(x)=0$. Sprendžiant nehomogeninę lygtį (žr. 125 pratimą), užtenka rasti bent vieną jos sprendinį ir išspręsti atitinkamą homogeninę lygtį. Nehomogeninės lygties sprendinio ieškojimas — uždavinys, neturintis nieko bendro su mūsų nagrinėjamais klausimais.

Kad samprotauti būtų lengviau, nagrinėsime tik antros eilės lygtį, t. y. atvejį $n=2$.

Taigi tarkime, kad turime diferencialinę lygtį su kompleksiniais koeficientais p ir q:

$$y''+py'+qy=0. \tag{22}$$

Tos lygties sprendinį laikysime rodikline funkcija $y=e^{\lambda z}$, $\lambda\in\mathbf{C}$. Pagal 3 paragrafo (23) formulę rodiklinės funkcijos e^z išvestinė lygi e^z. Kaip tuo atveju, kai kintamasis yra realus, taip ir šiuo atveju galima įrodyti, kad sudėtinės funkcijos $e^{\lambda z}$ išvestinė lygi $\lambda e^{\lambda z}$. Todėl $y''=(\lambda e^{\lambda z})'=\lambda^2 e^{\lambda z}$. Gautus reiškinius įrašę į (21) lygtį, gauname

$$\lambda^2 e^{\lambda z}+p\lambda e^{\lambda z}+q\,e^{\lambda z}=0.$$

Kadangi e^z, kaip įsitikinome 3 paragrafe, neįgyja reikšmės 0, tai $\lambda^2+p\lambda+q=0$.

Vadinasi, funkcija $y=e^{\lambda z}$ yra (22) lygties sprendinys tada ir tik tada, kai skaičius λ yra lygties

$$x^2+px+q=0 \tag{23}$$

šaknis. Ši lygtis vadinama (22) diferencialinės lygties *charakteristine lygtimi.*

Charakteristinė lygtis turi dvi kompleksines šaknis α ir β, kurios arba yra skirtingos, arba sutampa. Iš pradžių nagrinėsime atvejį, kai α ir β yra skirtingi skaičiai.

Tuomet (22) lygtis jau turi du sprendinius: $y=e^{\alpha z}$ ir $y=e^{\beta z}$. Nesunku įsitikinti, kad šiuo atveju kiekviena funkcija

$$y=ce^{\alpha z}+de^{\beta z} \tag{24}$$

irgi tenkina (22) lygtį. Todėl turime begalinę sprendinių aibę.

Iš tos aibės išskirsime sprendinį y, atitinkantį pradines sąlygas

$$y(0)=a, \ y'(0)=b^*. \qquad (25)$$

Kadangi $y'=\alpha ce^{\alpha z}+\beta de^{\beta z}$, tai pradines sąlygas galima užrašyti šitaip:

$$c+d=a, \quad \alpha c+\beta d=b.$$

Iš tų lygybių lengva rasti konstantas c ir d:

$$c=\frac{a\beta-b}{\beta-\alpha}, \quad d=\frac{b-a\alpha}{\beta-\alpha}. \qquad (26)$$

Todėl (22) lygties sprendinys, atitinkantis (25) pradines sąlygas, išreiškiamas šitaip:

$$y=\frac{a\beta-b}{\beta-\alpha}e^{\alpha z}+\frac{b-a\alpha}{\beta-\alpha}e^{\beta z}. \qquad (27)$$

Vadinasi, kai charakteristinė lygtis turi skirtingas šaknis, radome diferencialinės lygties sprendinį, atitinkantį iš anksto nurodytas pradines sąlygas. Kai $\alpha=\beta$, galima įrodyti, kad (22) lygties sprendinys yra ne tik funkcija $y=e^{\alpha z}$, bet ir funkcija $y=ze^{\alpha z}$. Tokiu atveju (22) lygtis turi be galo daug sprendinių, reiškiamų formule

$$y=(c+dz)e^{\alpha z}. \qquad (28)$$

Šioje sprendinių aibėje irgi visada galima rasti sprendinį, atitinkantį nurodytas pradines sąlygas.

Dabar grįšime prie savo pagrindinio uždavinio ir nagrinėsime atvejį, kai (22) lygties koeficientai p ir q bei (25) pradinėse sąlygose nurodyti skaičiai a ir b yra realūs, o ieškomoji funkcija y irgi yra realaus kintamojo funkcija. Įrodysime, kad tokiu atveju (27) formulė vistiek išreiškia uždavinio sprendinį, nors toje formulėje, kai α ir β yra menami, yra menamųjų skaičių ir rodiklinių reiškinių su menamais rodikliais.

Tam reikalui iš pradžių rasime skaičių $\bar{c}$, jungtinį skaičiui c, remdamiesi tuo, kad (23) kvadratinės lygties su *realiais* koeficientais šaknys α ir β yra jungtiniai skaičiai:

$$\bar{c}=\overline{\frac{a\beta-b}{\beta-\alpha}}=\frac{\bar{a}\bar{\beta}-\bar{b}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}=\frac{a\alpha-b}{\alpha-\beta}=\frac{b-a\alpha}{\beta-\alpha}=d.$$

Be to, esant bet kuriam $z\in\mathbf{C}$, teisinga lygybė $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$. Iš tikrųjų, jei $z=x+iy$, tai

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y),$$

---

* Kad reikėtų paprasčiau samprotauti, tariame, jog pradinės sąlygos nurodytos taške $x_0=0$. Matematiniu požiūriu toks apribojimas neesminis.

todėl

$$\overline{e^z}=\overline{e^x(\cos y+i\sin y)}=e^x(\cos(-y)+i\sin(-y))=e^{x-iy}=e^{\bar z}.$$

Vadinasi, kai $z=x\in\mathbf{R}$, iš (27) formulės gauname

$$\bar y=\bar c e^{\bar\alpha x}+\bar d e^{\bar\beta x}=\dot d e^{\bar\alpha x}+c e^{\bar\beta x}=d e^{\bar\alpha x}+c e^{\bar\beta x}=d e^{\beta x}+c e^{\alpha x}=y.$$

Iš to aišku, kad (27) formulė iš tikrųjų išreiškia realaus kintamojo funkciją.

Vis dėlto geriau tą formulę pertvarkyti, kad iš jos galėtume tiesiogiai matyti, jog y yra realioji funkcija. Jei

$$c=re^{i\varphi},\quad \alpha=k+il,$$

tai

$$\bar c=re^{-i\varphi},\quad \bar\alpha=k-il.$$

Todėl

$$y=re^{i\varphi}e^{(k+il)x}+re^{-i\varphi}e^{(k-il)x}=re^{kx}\left(e^{i(lx+\varphi)}+e^{-i(lx+\varphi)}\right)=$$
$$=2\,re^{kx}\cos(lx+\varphi).$$

Vadinasi, (22) diferencialinės lygties sprendinys, atitinkantis (25) pradines sąlygas, yra šitoks:

$$y=2\,re^{kx}\cos(lx+\varphi). \qquad (29)$$

Šioje formulėje surašytos konstantos r, k, l ir φ nenurodytos pradinėje (22) lygtyje, bet jas, aišku, galima rasti, žinant skaičius p, q, a ir b.

(29) formulė išvesta, tarus, kad (23) charakteristinė lygtis turi dvi skirtingas menamas šaknis, t. y. kad ji turi neigiamą diskriminantą. Kai diskriminantas teigiamas, t. y. kai šaknys α ir β yra realios ir skirtingos, diferencialinės lygties sprendinys nusakomas (27) formule: šiuo atveju jokių papildomų pertvarkymų nereikia. Pagaliau, jei diskriminantas lygus 0, t. y. $\alpha=\beta$, tai savaime aišku, kad $\alpha\in\mathbf{R}$, o ieškomasis sprendinys y reiškiamas (28) formule, kurios konstantas c ir d lengva rasti iš (25) pradinių sąlygų. Vadinasi, bet kuri (22) tipo diferencialinė lygtis su realiais koeficientais turi sprendinį, atitinkantį nurodytas pradines sąlygas.

Dar kartą atkreipiame dėmesį į atlikto samprotavimo principinę reikšmę: iš pradžių, formuluojant uždavinį, kalbama tik apie realiuosius skaičius, sprendinius išreiškiančiose galutinėse formulėse — irgi tik realieji skaičiai. Kompleksiniai skaičiai vartojami tik sprendimo procese, kaip pagalbinis aparatas,— jie pasirodo ir pranyksta.

Kaip pavyzdį išspręsime harmoninio svyravimo diferencialinę lygtį.

Sakykime, reikia rasti diferencialinės lygties

$$y'' = -\omega^2 y$$

sprendinį, atitinkantį šias pradines sąlygas:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Pateiktosios diferencialinės lygties charakteristinė lygtis $x^2 + \omega^2 = 0$ turi dvi šaknis: $i\omega$ ir $-i\omega$. Ieškomas sprendinys išreiškiamas šitaip:

$$y = ce^{i\omega x} + de^{-i\omega x}.$$

Tuomet $y' = ci\omega e^{i\omega x} - di\omega e^{-i\omega x}$, todėl, remdamiesi pradinėmis sąlygomis, kai $x=0$, gauname sistemą

$$c + d = 0, \quad i\omega(c - d) = 1,$$

iš kurios sužinome, kad $c = -\frac{1}{2\omega}i$, $d = \frac{1}{2\omega}i$, arba

$$c = \frac{1}{2\omega}e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad d = \frac{1}{2\omega}e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Vadinasi,

$$y = \frac{1}{2\omega}\left(e^{i\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-i\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right)}\right) =$$

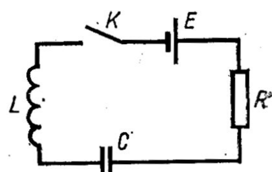
$$= \frac{1}{\omega}\cos\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\omega}\sin \omega x.$$

Pasakysime dar keletą papildomų minčių. Čia nagrinėjome tik antro uždavinio sprendimą — ieškojome sprendinių, atitinkančių nurodytas pradines sąlygas. Šio uždavinio vis dėlto neišsprendėme galutinai: radome tik vieną reikalaujamą sprendinį, todėl dar gali egzistuoti kiti sprendiniai, kurie galbūt randami kokiu nors kitu būdu.

Nagrinėjant 3 skyrelyje rekurentines sekas, panašioje situacijoje sprendinio vienatis buvo garantuota: jei dviejų sekų, nusakomų antros eilės rekurentine formule, pirmieji du nariai sutampa, tai turi sutapti ir kiti tų sekų nariai. Tuo tarpu, kai dvi funkcijos tenkina tą pačią (22) diferencialinę lygtį ir atitinka tas pačias pradines sąlygas, dar neaišku, kodėl tų funkcijų reikšmės turi sutapti visuose kituose taškuose x.

Ir vis dėlto tos funkcijos iš tikrųjų sutampa: tai išplaukia iš *vienaties teoremos*, kuri įrodoma bendrojoje diferencialinių lyg-

čių teorijoje. Toje bendrojoje teorijoje, be to, įrodoma, kad (24) ir (28) formulės nusako *bendrąjį* (22) lygties *sprendinį*, t. y. bet kuris tos lygties sprendinys gaunamas iš tų formulių, atitinkamai parinkus konstantų c ir d reikšmes.



24 pav.

Pratimai

122. Išspręskite diferencialines lygtis (raskite bendruosius sprendinius):

a) $y''+3y'+2=0$; b) $y''+y'+1=0$.

123. Iš fizikos kurso žinoma, kad 24 paveiksle pavaizduotu virpesių kontūru tekančios srovės stipris $i(t)$ tenkina diferencialinę lygtį $Li''+Ri'+\frac{i}{C}=0$.

Išspręskite tą lygtį pradinėmis sąlygomis $i(0)=0$, $i'(0)=E$, kai raktas K akimirkai sujungia kontūrą.

Ištirkite, kaip sprendinys priklauso nuo L, C ir R.

124. Kai $p^2-4q=0$, vienas diferencialinės lygties $y''+py'+$ $+qy=0$ sprendinys yra funkcija $y=xe^{-\frac{p}{2}x}$. Įrodykite.

125. Jei $f(x)$ — žinoma funkcija, tai kiekvieną lygties $y''+$ $+py'+qy=f(x)$ sprendinį galima išreikšti suma $y=a(x)+u(x)$, kurios dėmuo $a(x)$ yra atskirasis tos lygties sprendinys, o dėmuo $u(x)$ — homogeninės lygties $u''+pu'+qu=0$ sprendinys. Įrodykite.

Atsakymai ir nurodymai

1. $2x^4+x^3+x^2-x$. **2.** a) 1 ir 1; b) 2^{100} ir 1; c) 1 ir 2^n. **3.** Patikrinama tiesiogiai. **4.** $a=11$; $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. **5.** $a=-12$, $b=6$. **6.** a) $-x_1, -x_2, -x_3, \ldots, -x_n$; b) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$; c) $-\frac{1}{x_1}, -\frac{1}{x_2}, \ldots, -\frac{1}{x_n}$; d) $\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2}$. **7.** Uždavinio sąlygoje nurodytas daugianaris yra nelyginė funkcija. **8.** Jei $p(-x)=-p(x)$, tai $-a_k=(-1)^k a_k$; iš čia ir išplaukia uždavinio teiginys. **9.** a) $\frac{1+3^{100}}{2}$; b) $\frac{1-3^{100}}{2}$. **10.** b) Dalmuo $2x^2+3x+13$, liekana $34x+6$; c) dalmuo $\frac{1}{3}$, liekana $-\frac{1}{3}x^2+x-\frac{1}{3}$. **11.** $ar(x)$. **12.** $m=-1$, $p=-2$. **13.** $a=3$, $b=-4$. **14.** $x_1=x_2=1$, $x_3=-2$. **15.** Remtis tuo, kad $3^{60}+1=81^{15}+1$. **16.** $5x-5$. **17.** $2x+1$. **18.** $a=-2$, $b=0$. **19.** Samprotaujama, kaip sprendžiant 4 pavyzdį 77 puslapyje.

20. Jei $z=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}$, tai $z^3+z-2=0$. Ta lygtis turi tik vieną realią šaknį $z=1$, todėl teiginys teisingas. **21.** Tarkime, kad $y=x^n$, ir nagrinėkime daugianarį $f(y)$. Iš uždavinio sąlygos aišku, kad $f(1)=0$, todėl $f(y)=(y-1)g(y)$. Vadinasi, $f(x^n)=(x^n-1)g(x^n)$. **22.** 3. **23.** $a=-1$. **24.** Jei x_0 yra k-kartė daugianario $f(x)$ šaknis, tai $f(x)=(x-x_0)^k h(x)$ ir $h(x_0)\neq 0$. Tuomet $f'(x)=k(x-x_0)^{k-1}h(x)+(x-x_0)^k h'(x)=(x-x_0)^{k-1}g(x)$, be to, $g(x_0)=kh(x_0)+$ $+(x-x_0)h'(x_0)=kh(x_0)\neq 0$. Tai ir reikėjo įrodyti. **25.** Visi daugianariai $a(x-x_0)^n$; įrodoma matematinės indukcijos metodu. **26.** $\left(\frac{b}{5}\right)^5=-\left(\frac{a}{4}\right)^4$.

27. $a=-\frac{10}{3}$, $b=5$, $c=\frac{8}{3}$. **28.** Sakykime, $g(x)=a(x-x_1)\dots(x-x_n)$. Kadangi $x_1, x_2, \dots, x_n$ yra daugianario $f(x)$ šaknys, tai $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-$ $-x_n)\ h(x)=g(x)h(x)$. **29.** Lygybė teisinga, kai x — bet kuris realusis skaičius. **30.** a) $x=2$; b) racionalių šaknų nėra. **31.** Įrodykite, kad $f(m)$ yra nelyginis skaičius, kai m — bet kuris sveikasis skaičius. **32.** Iš pradžių įrodykite, kad lygtis $t^4-3t^3-1=0$ neturi racionalių šaknų. **33.** Jei $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$, tai $q^n f(1)=q^n\left(f(1)-\right.$ $\left.-f\left(\frac{p}{q}\right)\right)=(p-q)C$ ir C — sveikasis skaičius. Analogiškai $q^n f(-1)=$ $=q^n\left(f(-1)-f\left(\frac{p}{q}\right)\right)=(p+q)B$ ir B — sveikasis skaičius. **34.** Neegzistuoja. **35.** Įrodykite, kad $f(5)=f(2)+f(3)+M$, o M — sveikas skaičius, dalus iš 6. **36.** a) $5+$ $+i$; b) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$; c) $\frac{3}{10}+\frac{3}{10}i$; d) -2^{990}; e) 1; f) $i^{4k}=1$; $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$; g) $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$; h) $-\frac{1+i}{2}$; i) 1. **37.** a) $x=\frac{7}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$; b) $x=\frac{1}{7}$, $y=\frac{3}{7}$. **38.** a) $z=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$; b) jei $z=x+iy$, tai iš lygybės $z^2=i$ gauname $x^2-y^2=0$, $2xy=1$. Išsprendę šią sistemą, randame x ir y. Galutinai $z_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; c) $z_{1,2}=\pm(2+i)$; d) $z_{1,2}=i(1\pm\sqrt{2})$. **40.** Tiesė $x+y=1$. **41.** Tiesė $y=-x$. **42.** $\frac{z+w}{2}$. **43.** $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$. **44.** Yra trys tokie taškai: $z=z_1+z_2-$ $-z_3$, $z=z_1+z_3-z_2$, $z=z_2+z_3-z_1$. **45.** a) Vidus žiedo, kurio centras — taškas $(1,0)$, vidinis spindulys lygus 1, išorinis 2; b) pusplokštumė $y<\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$; c) apskritimas, kurio centras — taškas $(0; 0,5)$, o spindulys lygus 2; f) tiesė $y=1-2x$; g) tiesė $y=0$; k) tiesė $y=1-x$; o) spindulys $y\sqrt{3}+x+\sqrt{3}=0$, $y<-1$; r) apskritimas, kurio centras — taškas $\frac{1+i}{2}$, o spindulys lygus $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **46.** Remkitės vektorių z_3-z_1 ir z_2-z_1 kolinearumu. **47.** a) $\cos 0+i\sin 0$; b) $\cos\pi+i\sin\pi$; c) $\cos\frac{\pi}{2}+$ $+i\sin\frac{\pi}{2}$; d) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; e) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; f) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; g) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; h) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; i) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$;

k) $5(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; l*) $5(\cos(2\pi-\varphi)+i\sin(2\pi-\varphi))$; m) $5(\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi))$; n) $5(\cos(\pi+\varphi)+i\sin(\pi+\varphi))$; o) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; p) $\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, kai $\cos\alpha>0$, t. y. $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; $-\frac{1}{\cos\alpha}(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha))$, kai $\cos\alpha<0$, t. y. $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$.

48. a) 2^6; b) $2(1-i)$; c) $-\sin 3\alpha-i\cos 3\alpha$; d) $\frac{\sin(\beta-\alpha)+i\cos(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}$.

49. a) $2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$; b) $\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha$. **50.** $\frac{2}{3}(1-2i)$. **51.** Kai n dalijasi iš 4. **52.** Apskritimas, kurio centras — taškas $3-4i$, o spindulys lygus $\sqrt{2}$. **53.** $32\,045=5\cdot13\cdot17\cdot29=|(2+i)(3+2i)(4+i)(5+2i)|^2=|-19+178i|^2=19^2+178^2=173^2+46^2$. **54.** a) Taškai z_1 ir z_2 priklauso spinduliui, kurio pradžia — taškas O; b) taškai z_1, z_2 ir O yra vienoje tiesėje, O yra tarp z_1 ir z_2, be to, $|z_1|\geqslant|z_2|$; c) kampas z_1Oz_2 — status. **55.** Remkitės lygybe $|z|^2=z\cdot\bar{z}$. **56.** Jei O, z_1, z_2 ir z_3 yra nuosekliai surašytos to keturkampio viršūnės, tai pagal sąlygą $|z_1|^2+|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3|^2=|z_2|^2+|z_1-z_3|^2$. Iš tos lygybės, remdamiesi formule $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, gauname $(\bar{z}_1-\bar{z}_2+\bar{z}_3)(z_1-z_2+z_3)=0$, t. y. $z_2=z_1+z_3$, o tai reiškia, kad tas keturkampis yra lygiagretainis. **57.** a) Apskritimas $|z|=1$; b) ir c) tuščioji aibė; d) apskritimas $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$; e) tiesė $y=0$; f) pusplokštumė $x<\frac{1}{2}$; g) spindulys $\arg z=\frac{7\pi}{4}$. **58.** a) -2^{990}; b) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$; c) $-\frac{1}{\cos^{1980}17^\circ}$; d) $\frac{i}{\cos^{90}1^\circ}$. **59.** a) $\frac{1}{\cos^n\alpha}\left(\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$; b) $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$; c) $2^n\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$. **60.** $2\cos\frac{n\pi}{3}$. **61.** Remkitės Niutono ir Muavro formulėmis.

62. Sakykime, kad $\sin 1^\circ=\frac{p}{q}$, o p ir $q>0$ — sveiki skaičiai. Tuomet pagal 61 uždavinį $\sin 45^\circ=\sin 45\cdot1^\circ$ galima būtų išreikšti kintamojo $\sin 1^\circ$ daugianariu su sveikais koeficientais, t. y. skaičius $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ būtų racionalus. Analogiškai įrodoma, kad $\cos 1^\circ$ yra iracionalus. **63.** a) $\frac{a^{n+1}\sin nx+a^n\sin(n+1)x-\sin x}{a^2-2a\cos x+1}$; b) $\frac{a^{n+1}\cos nx+a^n\cos(n+1)x-a-\cos x}{a^2-2a\cos x+1}$; c) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}$. **64.** $\operatorname{tg}5\alpha=\frac{5\operatorname{tg}\alpha-10\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}^5\alpha}{1-10\operatorname{tg}^2\alpha+5\operatorname{tg}^4\alpha}$. **65.** a) Šeši kampai, kurių viršūnės — taškas O, didumas lygus $\frac{\pi}{6}$, pusiaukampinės — spinduliai $\arg z=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{3}$, $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$; b) sritis $|xy|\leqslant1$. **66.** a) $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$; b) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+$

---

* Pratimų l), m) ir n) atsakymuose $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

$+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$; c) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)$, $k=0, 1, 2$; d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)$, $k=0, 1, 2$; e) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$, $k=0, 1, 2$; f) $\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$; g) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k=0, 1, 2, 3$; h) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right)$, $k=0, 1, 2, 3$; i) $\sqrt[5]{5}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)\right)$, $k=$ $=0, 1, 2, 3, 4$. **67.** Jei $\alpha^k=1$ ir $n=km$, tai $\alpha^n=(\alpha^k)^m=1$. **68.** Jei tarsime, kad n nesidalija iš k, tai $n=kl+r$ ir $0<r<k$. Tuomet, imant bet kurią k-tojo laipsnio šaknį α iš vieneto, bus $\alpha^{kl+r}=\alpha^r=1$, o to negali būti. **69.** Iš pradžių įrodykite: jei r ir s yra reliatyviai pirminiai, tai iš lygybių $\alpha^r=1$ ir $\alpha^s=1$ išplaukia $\alpha=1$. Jei d — skaičių m ir n bendras didžiausias daliklis, tai $(\alpha^d)^{\frac{m}{d}}=1$ ir $(\alpha^d)^{\frac{n}{d}}=1$, o kadangi $\frac{m}{d}$ ir $\frac{n}{d}$ — reliatyviai pirminiai skaičiai, tai $\alpha^d=1$. **71.** Iš sąlygos lengva įsitikinti, kad $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ yra skirtingi skaičiai. Kadangi jie yra n-tojo laipsnio šaknys iš vieneto, tai kiekviena šaknis yra kuris nors iš tų skaičių. **72.** a) i ir $-i$; b) $\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}$, $k=1, 3, 5, 7$; c) $\cos\frac{k\pi}{3}+$ $+i\sin\frac{k\pi}{3}$, $k=1, 5$; d) $\cos\frac{k\pi}{6}+i\sin\frac{k\pi}{6}$, $k=1, 5, 7, 11$; e) $\cos\frac{k\pi}{12}+i\sin\frac{k\pi}{12}$, $k=$ $=1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$. **73.** Pirminės yra visos šaknys $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, kai k ir n yra reliatyviai pirminiai, ir tik tos šaknys. **74.** a) $x_1=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$, $x_2=$ $=\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$, $x_3=\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{8}$, $x_4=\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{8}$; b) $z_1=0$, z_2, z_3, z_4 — trečiojo laipsnio šaknys iš 1; c) $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$; d) $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha+k\pi}{n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. **75.** a) $z_1=w_1=$ $=i$; $z_2=w_2=-i$; b) $z_1=1$, $w_1=-1$; $z_2=-1$, $w_2=1$. **76.** Suma lygi nuliui, kai k nesidalija iš n; ji lygi 1, kai k dalijasi iš n. Remkitės 71 uždavinio rezultatu.

77. a) $x^{2k}-1=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{k}+1\right)\ldots\left(x^2-2x\cos\frac{(k-1)\pi}{k}+1\right)$;

b) $x^{2k}+1=\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{2k}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{2k}+1\right)\ldots\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2k}+1\right)$;

c) $x^{2k+1}+1=(x+1)\left(x^2+2x\cos\frac{2\pi}{2k+1}+1\right)\ldots\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2k+1}+1\right)$. **78.** Teiginį užtenka įrodyti tuo atveju, kai trikampio viršūnės yra trečiojo laipsnio šaknys iš vieneto: 1, α ir α^2. Jei taškas z priklauso vienetinio apskritimo lankui, kurio galai yra 1 ir α, tai reikia įrodyti, kad $|z-\alpha|+|z-1|=|z-\alpha^2|$. Pastebėję, kad vektoriai $\alpha z-\alpha^2$ ir $z-1$ yra vienos krypties, pertvarkome lygybės dešiniąją pusę: $|z-\alpha|+|z-1|=|\alpha z-\alpha^2|+|z-1|=|\alpha z-\alpha^2+z-1|=|z(\alpha+1)-\alpha^2-1|=$ $=|-\alpha^2 z+\alpha|=|\alpha^2 z-\alpha|=|z-\alpha^2|$, o tai ir reikėjo įrodyti (rėmėmės lygybėmis $\alpha^3=1$ ir $\alpha^2+\alpha+1=0$). **79.** a) $-e$; b) $e^2(\cos 1+i\sin 1)$; c) $2k\pi i$, $k\in\mathbf{Z}$; d) $(2k+$ $+1)\pi i$, $k\in\mathbf{Z}$; e) $\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)i$, $k\in\mathbf{Z}$; f) $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$, $k\in\mathbf{Z}$. **80.** a) Apskri-

timas $|z|=1$; b) apskritimas $|z|=e^a$; c) spindulys $\arg z=\frac{\pi}{4}$; d) spindulys $\arg z=a$. **81.** Išvesime, pavyzdžiui, dvigubo argumento sinuso formulę: $\sin 2z=\frac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i}=2\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2\sin z\cos z$. **82.** a) $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(3\pm2\sqrt{2})$, $k\in\mathbf{Z}$; b) $z=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; c) šaknų nėra; d) $z=i\pi(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$. **83.** a) Arba $\operatorname{Im} z=0$, arba $\operatorname{Re} z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Jei $z=x+iy$, tai $\sin z=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})\sin x+\frac{i}{2}(e^y-e^{-y})\cos x$; menamąją dalį prilyginę nuliui, gauname atsakymą; b) arba $\operatorname{Im} z=0$, arba $\operatorname{Re} z=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. **84.** a) $e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k\in\mathbf{Z}$; b) $e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$, $k\in\mathbf{Z}$; c) $ie^{-\pi+4k\pi}$, $k\in\mathbf{Z}$; **85.** a) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$; b) $(x-2i)(x+2i)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)(x-\varepsilon_5)(x-\varepsilon_6)$; $\varepsilon_k=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)\right)$; c) $x^{12}+x^6+1=\left(x^6-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x^6-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, paskui kiekvienas dauginamasis išskaidomas į 6 tiesinius daugiklius. **86.** a) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$; b) $(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$; c) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; d) $(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$. **87.** $p_1=i$, $q_1=-1$; $p_2=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$, $q_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$; $p_3=-\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $q_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. **88.** Kai $a=0$, $m=2k+1$, $k\in\mathbf{Z}$; kai $a=2$, $m=4k+2$, $k\in\mathbf{Z}$; kai $a=-2$, $m=4k$, $k\in\mathbf{Z}$. **89.** Kai $m\neq3k$, $k\in\mathbf{Z}$. **90.** Kai m dalijasi iš n. **91.** Remkitės tuo, kad $x^{26}+x+1$ dalijasi iš x^2+x+1. **92.** $\lambda=\pm6$. **93.** $\lambda=6$, $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=-2$. **94.** Remkitės skaidiniu $x^6-x^5-x^4+x^2+x-1=(x+1)(x-1)^3(x^2+x+1)$. **95.** (1, 3, 5), (1, 5, 3), (5, 3, 1), (5, 1, 3), (3, 5, 1), (3, 1, 5). **96.** Daugianario, iš kurio dalijasi $x^{105}-9$, laisvasis narys yra kelių 105-ojo laipsnio šaknų iš 9 sandauga; todėl jis negali būti sveikas skaičius, kai daliklio laipsnis mažesnis už 105. **97.** Sprendžiame panašiai, kaip šio paragrafo 4 pavyzdį. **98.** Tiesė $y=3-3x$. **99.** a) Skritulys $|z|\leqslant1$; b) skritulys $|z-2i|\leqslant3$; c) skritulys $|z+4-i|\leqslant2$. **100.** Posūkiai kampu $\frac{5\pi}{6}$: $z\to\frac{-\sqrt{3}+i}{2}z+\frac{(1+\sqrt{3})(i\sqrt{3}+1)}{2}$ ir $z\to\frac{-\sqrt{3}+i}{2}z+1+i$. **101.** Simetrijos ašis $y=(\sqrt{2}-1)x$. **102.** a) Posūkis 90° kampu apie tašką $\frac{3-\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{4}$; b) posūkis 90° kampu apie tašką $2(1+i)$; c) kai $\alpha+\beta\neq2\pi$, posūkis kampu $\alpha+\beta$ apie tam tikrą tašką; kai $\alpha+\beta=2\pi$, lygiagretusis postūmis; d) $z\to\frac{4+3i}{5}z+3-i$, tai posūkis apie tašką $3+4i$ kampu $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; e) posūkis 90° kampu apie tašką $z=0$. **103.** Posūkis arba lygiagretusis postūmis. **104.** a) $z\to i\bar{z}+i-1$; b) $z\to-i\bar{z}+2$; c) $z\to\bar{z}+3i+1$. **105.** $z\to az+b$, kai $|a|=1$, $-a\bar{b}i+2a+b=2i$. **106.** Jei $a_0=\frac{a}{|a|}$, tai $az+b=a_0\left(|a|z-\frac{b}{1-a_0}\right)+\frac{b}{1-a_0}$; iš to aišku, kad transformacija yra kompozicija, sudaryta iš homotetijos su centru $z=0$ ir koeficientu $|a|$ ir posūkio kam-

pu $\arg a$ apie tašką $z=\frac{b}{1-a_0}$. „Gryna“ homotetija gaunama, kai a — realus skaičius. **107.** Tiesė $y=x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ($\alpha=\arg a$) ir jai statmena tiesė $y=-x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ atvaizduojamos į jas pačias. **108.** Jei $a_0=\frac{a}{|a|}$, tai $a\bar{z}+b=|a|\left(a_0\bar{z}-\frac{b}{1-|a|}\right)+$ $+\frac{b}{1-|a|}$; iš to aišku, kad ta transformacija, sudaryta iš simetrijos tiesės $y=x\operatorname{tg}\frac{\arg a}{2}$ atžvilgiu ir homotetijos $H^{a}_{\frac{b}{1-|a|}}$. **109.** a) Transformacijos $z\to az+$ $+(1-a)(1+i)$, $|a|=1$, t. y. posūkiai apie tašką $z=1+i$; b) $z\to z+k(1+i)$ ir $z\to i\bar{z}+(k-1)+ik$, k — realus skaičius. **110.** Tokių transformacijų nėra. **111.** Iš viso 6 poslinkiai. **112.** Kadangi $ax_1^n+bx_1^{n-1}+cx_1^{n-2}=0$ ir $ax_2^n+bx_2^{n-1}+$ $+cx_2^{n-2}=0$, tai $as_n+bs_{n-1}+cs_{n-2}=0$. **113.** Remkitės lygybe $s_n-6s_{n-1}+$ $+s_{n-2}=0$ ir indukcijos metodu. **114.** $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. **115.** Kai n dalus iš 5. **116.** a) $u_n=c_1+c_2 3^n$; b) $u_n=c_1\cos\frac{n\pi}{3}+c_2\sin\frac{n\pi}{3}$. **117.** Lengva įsitikinti, kad $n\lambda^{n-1}$ yra sprendinys. Jei u_1 ir u_2 žinomi, tai lengva rasti c_1 ir c_2. **118.** $u_n=3^n(c_1 n+c_2)$. **119.** (a_n) yra aritmetinė progresija tada ir tik tada, kai $a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}$ ir $n>2$, o tai tolygu lygybei $a_n-2a_{n-1}+$ $+a_{n-2}=0$. **120.** Sprendžiame panašiai, kaip 116 uždavinį. **121.** Jei $w_n+pw_{n-1}+$ $+qw_{n-2}=a_n$ ir $v_n+pv_{n-1}+qv_{n-2}=a_n$, tai seka $u_n=w_n-v_n$ tenkina lygtį $u_n+pu_{n-1}+qu_{n-2}=0$. **122.** a) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$; b) $y=\left(c_1\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}+\right.$ $\left.+c_2\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$. **123.** Tarkime, kad λ_1 ir λ_2 yra lygties $CL\lambda^2+RC\lambda+1=$ šaknys. Jei $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$, tai $i(t)=\frac{E}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t})$. Jei $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$, tai $i(t)=$ $=Ete^{-\frac{R}{2L}t}$. Jei $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$, tai $i(t)=\frac{E}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin t\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$.

124. Bendrasis sprendinys: $y(x)=e^{-\frac{p}{2}x}(c_1x+c_2)$. **125.** Sprendžiame panašiai, kaip 121 uždavinį.

SFERINĖS GEOMETRIJOS PRADMENYS

Beveik visi žino, kad euklidinė geometrija yra vienas seniausių mokslų: jau III a. pr. m. e. pasirodė klasikinis Euklido veikalas „Pradmenys". Mažai kas žino, kad sferinė geometrija tik truputį jaunesnė. Ji pirmą kartą sistemingai išdėstyta I—II a. Graikų matematiko Menelajaus (I a.) knygoje „Sferika" buvo nagrinėjamos sferinių trikampių savybės; be kita ko buvo įrodyta, kad sferinio trikampio kampų suma didesnė už 180°. Sferinę geometriją papildė kitas graikų matematikas Klaudijus Ptolemėjas (II a.). Jis pirmasis sudarė trigonometrinių funkcijų lenteles, sukūrė stereografinę projekciją.

Sferinė geometrija, kaip ir euklidinė atsirado, sprendžiant praktinio pobūdžio uždavinius, pirmiausia astronomijos uždavinius. Tuos klausimus spręsti būtinai reikėjo, pavyzdžiui, keliautojams ir jūrininkams, kurie orientuodavosi pagal žvaigždes. Kadangi, vykdant astronominius stebėjimus, patogu tarti, kad ir Saulė, ir Mėnulis, ir žvaigždės juda įsivaizduojamoje „dangaus sferoje", tai, tiriant jų judėjimą, savaime reikėjo sferinės geometrijos žinių. Todėl neatsitiktinai garsiausias Ptolemėjo veikalas vadinosi „Didžioji astronomijos sandara", kuriame išdėstytas geocentrinės pasaulio sistemos matematinis modelis.

Sferinė geometrija greitai buvo pritaikyta ir grynai žemiškiems uždaviniams spręsti. Gana seniai buvo manoma, kad Žemė yra rutulio formos (Žemės spindulį palyginti labai tiksliai apskaičiavo Eratostenas III a. pr. m. e.). Todėl apskaičiuojant geografines koordinates, nustatant laivo kursą, sudarant geografinius žemėlapius, irgi reikėjo žinių apie sferą.

Tačiau atrasti pagrindinėms sferinės geometrijos teoremoms ir formulėms prireikė daug daugiau laiko negu euklidinės geometrijos uždaviniams spręsti. Sferinė geometrija buvo plėtojama indų (Aribjabhata, V a.) ir arabų mokslininkų (al Batani, IX a.; Abu al Vefa, XI a.) bei azerbaidžaniečių matematiko Nasyr ad Dino Tusio (XIII a.). Sferinės geometrijos rūmą toliau statė Europos matematikai: Regiomontanas, Neperis, Merkatorius ir kiti. Labai svarbūs čia buvo Leonardo Oilerio * darbai. Jo dėka sferinė geometrija įgijo dabartinį pavidalą.

---

* Leonardas Oileris (L. Euler, 1707—1783) — žymus šveicarų kilmės matematikas. Jis darbavosi beveik visose matematikos srityse. Ilgą laiką Oileris dirbo Peterburge. Toliau susipažinsite su dviem jo vardu pavadintomis teoremomis.

Dabar sferinė geometrija labai plačiai taikoma astronomijoje ir geodezijoje (moksle apie Žemės formą, dydį, gravitacijos lauką ir kt.), navigacijoje ir kartografijoje.

Sferinėje geometrijoje, kaip ir planimetrijoje, nagrinėjami taškai ir „tiesės" (trumpiausios sferoje), taškų atstumai, poslinkiai. Susipažinę su tomis sąvokomis, įsitikinsime, kad planimetrija turi daug bendra su sferine geometrija, nors esama ir svarbių skirtumų. Be to, susipažinsime su svarbiausiais sferinės geometrijos pritaikymais.

§ 1. SFERINĖS GEOMETRIJOS PRADINĖS SĄVOKOS

Primename, kad *spindulio* $R>0$ *sfera su centru taške* O vadinama aibė visų erdvės taškų, kurių atstumas nuo taško O lygus R. Spindulio R sferą su centru O žymėsime $\mathrm{Sf}(O, R)$. Pagal apibrėžimą

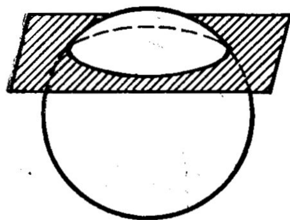
$$\mathrm{Sf}(O, R)=\{M \mid |OM|=R\}.$$

Pirmiausia reikia aptarti kaip sferoje matuoti trumpiausią atstumą tarp dviejų jos taškų A ir B? Kitaip sakant, reikia nustatyti, kuri yra trumpiausia sferos kreivė, jungianti taškus A ir B.

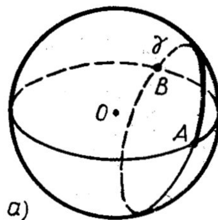
Paprasčiausia sferos kreivė yra apskritimas (1 pav.), gautas, sferą perkirtus bet kuria plokštuma („Geometrija IX—XI klasei", § 63). Plokštumas, einančias per sferos centrą, atitinka sferos apskritimai, turintys didžiausią spindulį, lygų sferos spinduliui R. Jie vadinami *didžiaisiais apskritimais*.

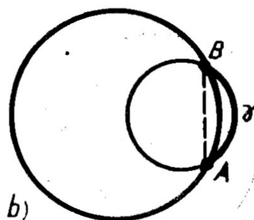
Jei sferos (O, R) taškai A ir B nėra diametraliai priešingi, t. y. nėra vieno skersmens galai, tai per taškus A ir B galima nubrėžti vienintelį didįjį apskritimą, kurį žymėsime (AB); jį gauname, sferą perkirtę vienareikšmiškai apibrėžta plokštuma AOB. Sakykime, kad $[AB]$ yra mažesnysis apskritimo (AB) lankas, jungiantis taškus A ir B. Nubrėžus bet kurio kito apskritimo lanką, jungiantį taškus A ir B (pavyzdžiui, lanką γ; 2 pav., *a*), paaiškėja, kad lanko γ ilgis yra didesnis už lanko $[AB]$ ilgį. Norint palyginti tų lankų ilgį, galima posūkiu apie tiesę AB sutapdinti lanko γ plokštumą su didžiojo apskritimo (AB) plokštuma; tuomet lankas $[AB]$ atsidurs lanko γ viduje (2 pav., *b*). Iš to lengva suvokti, kad lanko γ ilgis didesnis už lanko $[AB]$ ilgį (žr. 5 a) uždavinį).

Vadinasi, atstumas tarp dviejų sferos taškų, gaunamas matuojant didžiojo apskritimo lanku, yra mažesnis už atstumą, matuojamą bet kurio kito apskritimo lanku. Todėl atstumą sferoje natūralu apibrėžti šitaip.



1 pav.





2 pav.

Apibrėžimas. *Sferiniu atstumu tarp dviejų sferos taškų vadinamas didžiojo apskritimo, nubrėžto per tuos taškus, trumpesniojo lanko ilgis.*

(Tuo atveju, kai taškai A ir B yra diametraliai priešingi, per juos galima nubrėžti be galo daug didžiųjų apskritimų, bet visi pusapskritimiai, jungiantys taškus A ir B, turi vienodą ilgį, lygų πR.)

Sferinį atstumą nuo taško A iki taško B žymėsime $|AB|_s$. Lengva įsitikinti, kad tą atstumą, kai kampo AOB didumas $\widehat{AOB}$ išreikštas radianais, galima apskaičiuoti pagal formulę

$$|AB|_s = R \cdot \widehat{AOB}. \qquad (1)$$

Primename, kad atstumas plokštumoje ir erdvėje yra neapibrėžiama (pirminė) sąvoka, atitinkanti tris sąlygas, vadinamas atstumo aksiomomis:

(I) $|AB| \geqslant 0$, be to, $|AB| = 0$ tada ir tik tada, kai $A = B$;

(II) jei A ir B — bet kurie taškai, tai

$$|AB| = |BA|;$$

(III) jei A, B ir C — bet kurie taškai, tai

$$|AC| \leqslant |AB| + |BC|$$

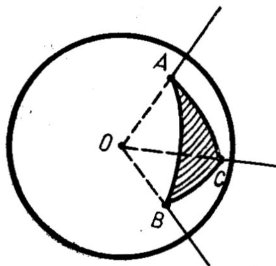
(ši nelygybė vadinama trikampio nelygybe).

Apibrėžėme sferinį atstumą, todėl reikia patikrinti, ar jis turi (I)—(III) savybes.

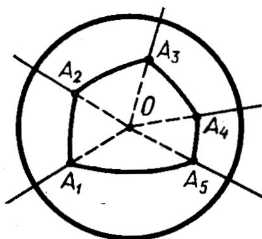
1 teorema. ***Sferinis atstumas atitinka sąlygas, išreikštas I—III aksiomomis.***

Įrodymas. Savaime aišku, kad sferinis atstumas turi savybes, nurodytas I ir II aksiomomis. Remdamiesi (1) formule, trikampio nelygybę $|AC|_s \leqslant |AB|_s + |BC|_s$ pakeisime nelygybe

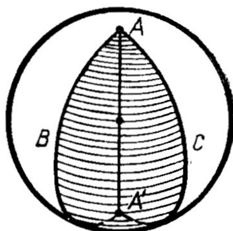
$$R \cdot \widehat{AOC} \leqslant R \cdot \widehat{AOB} + R \cdot \widehat{BOC}.$$



3 pav.



4 pav.



5 pav.

Nagrinėdami atitinkamą brėžinį (3 pav.), pastebime, kad tuo atveju, kai taškai A, B ir C nepriklauso vienam didžiajam apskritimui, trikampio nelygybė atitinka žinomą trisienio kampo $OABC$ plokščiųjų kampų prie viršūnės O savybę („Geometrija IX—XI klasei", § 41). Atvejį, kai taškai A, B ir C priklauso vienam didžiajam apskritimui, išnagrinėkite savarankiškai.

Didžiojo apskritimo (AB) trumpesnįjį lanką, jungiantį du ne diametraliai priešingus taškus A ir B, natūralu vadinti sferine atkarpa AB, o patį didįjį apskritimą — sferine tiese. (Sferinės geometrijos ir planimetrijos analogiją, kuri išplaukia iš tų apibrėžimų, nagrinėsime antrame paragrafe.)

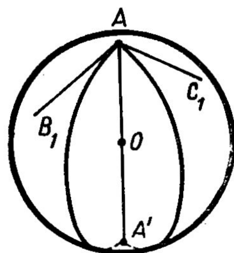
Įrodydami 1 teoremą, susidūrėme su netikėta atitiktimi, siejančia trisienį kampą $OABC$, kurio viršūnė yra sferos centras, su sferiniu trikampiu ABC — sferos dalimi, kurią riboja atkarpos AB, BC ir CA. Šia atitiktimi galima pagrįsti sferinio daugiakampio apibrėžimą: iškiluoju *sferiniu n-kampiu* vadinsime sferos ir iškilojo n-sienio kampo, kurio viršūnė yra sferos centras, sankirtą (4 pav.). Pagaliau, iš taško $A \in \mathrm{Sf}(O, R)$ nubrėžę sferoje „spindulius" AB ir AC (5 pav.), matome, kad iš pradžių jie „išsiskiria", o paskui vėl „susieina" — susikerta diametraliai priešingame sferos taške A'. Sferos dalis, esanti tarp lankų ABA' ir ACA', vadinama sferiniu dvikampiu AA'; tai plokštumos kampo sferinis analogas. Dvikampį irgi galima laikyti sferos ir dvisienio kampo, kurio briauna yra AA', o sienos — $AA'B$ ir $AA'C$, sankirta.

Savaime aišku, sferoje, kaip ir plokštumoje, atkarpos AB ilgiu vadinsime atstumą $|AB|_s$ tarp jos galų.

A p i b r ė ž i m a s. *Kampo BAC, esančio tarp sferoje nubrėžtų atkarpų AB ir AC, didumu vadiname didumą kampo, kurį sudaro didžiųjų apskritimų AB ir AC liestinės, išvestos per tašką A.*

Kadangi liestinės AB_1 ir AC_1 statmenos spinduliui OA (6 pav.), tai kampas B_1AC_1 yra dvisienio kampo, atitinkančio dvikampį AA', tiesinis kampas. Vadinasi, sferinio kampo A didumas

lygus dvisienio kampo prie briaunos AA' didumui. Toliau, vietoj žodžių „kampo didumas“ dažnai vartosime žodį „kampas“.



6 pav.

Vadinasi, susipažinome su tiesės, atstumo, atkarpos, kampo ir n-kampio ($n \geqslant 2$) sferoje sąvokomis. Iš pačių apibrėžimų išplaukia svarbus teiginys.

2 teorema. *Jei sferinis n-kampis $A_1A_2 \ldots A_n$ yra daugiasienio kampo $OA_1A_2 \ldots A_n$ ir sferos (O, R) sankirta, tai to n-kampio kraštinių ilgiai yra proporcingi daugiasienio kampo plokščiųjų kampų didumams: $|A_kA_{k+1}|_s = R \cdot A_k\widehat{O}A_{k+1}$, o sferinio daugiakampio kampai atitinkamai lygūs daugiasienio kampo dvisieniams kampams.*

Ši atitiktis, siejanti sferinius daugiakampius su daugiasieniais kampais, toliau bus labai naudinga (žr. § 3).

Pratimai

1. Įrodykite, kad dvi nesutampančios sferos arba neturi bendrų taškų, arba turi vieną bendrą tašką, arba jų sankirta yra apskritimas.

2. Kokia aibė gali būti trijų sferų sankirta?

3. Įrodykite, kad

a) $|AB|_s = |CD|_s$ tada ir tik tada, kai $|AB| = |CD|$;

b) $|AB|_s < |CD|_s$ tada ir tik tada, kai $|AB| < |CD|$.

4. a) Jei $[AB]$ yra sferinė atkarpa, o $AC_1C_2 \ldots C_nB$ — laužtė, sudaryta iš sferinių atkarpų, tai atkarpos AB ilgis ne didesnis už tos laužtės ilgį. Įrodykite.

b) Ar tas teiginys bus teisingas, kai vietoj atkarpos AB imsime bet kurį didžiojo apskritimo lanką?

5. a) Tarkime, kad iškilasis plokštumos daugiakampis yra kito (galbūt neiškilo) daugiakampio viduje. Įrodykite, kad pirmo daugiakampio perimetras yra mažesnis už antro daugiakampio perimetrą.

b) Ar ką tik suformuluotas teiginys bus teisingas, jei nereikalausime, kad pirmas daugiakampis būtų iškilasis?

c) Ar 5 a) teiginys tinka dviem iškiliems sferiniams daugiakampiams?

6. Ar tiesa, kad sferinio trikampio kampų suma visada lygi 180°?

§ 2. SFERINĖS GEOMETRIJOS IR PLANIMETRIJOS PANAŠUMAS

Pirmame paragrafe apibrėžėme svarbiausias sferinės geometrijos sąvokas, būtent, sferinio atstumo tarp dviejų sferos taškų ir sferinės tiesės (didžiojo sferos apskritimo) sąvokas. Įsitikinome, kad sferinis atstumas turi savybes, nurodytas įprastose atstumo aksiomose (1 teorema). Primename, kad planimetrijoje tiesės sąvoka neapibrėžiama — ji laikoma pirmine plokštumos geometrijos sąvoka, bet reikalaujama, kad plokštumos tiesės turėtų savybes, nusakomas atitinkamomis aksiomomis. Visų planimetrijos aksiomų sąrašas pateiktas geometrijos vadovėlyje IX—XI klasei. Išsiaiškinsime, kurių aksiomų teiginiai teisingi sferinėje geometrijoje, tinka sferinėms tiesėms.

Aksioma, kurioje tvirtinama, jog kiekviena tiesė yra taškų aibė, sferinei geometrijai, be abejo, tinka, nes didieji apskritimai iš tikrųjų yra taškų aibės. Bet jau su antrąja aksioma („kokie bebūtų du skirtingi A ir B, egzistuoja tik viena tiesė, kuriai tie taškai priklauso“) yra šiek tiek sudėtingiau. Jei sferos taškai A ir B nėra diametraliai priešingi, tai tas teiginys teisingas (paaiškinkite, kodėl), bet kai taškai A ir B yra diametraliai priešingi, egzistuoja be galo daug sferinių tiesių, kuriems priklauso tie taškai: sferos ir kiekvienos plokštumos, kurioje yra skersmuo AB, sankirta yra tiesė, turinti nurodytą savybę. Galima sakyti, kad ta aksioma sferinėje geometrijoje „beveik“ teisinga. Iš išlygos „beveik“ gauname netikėtą išvadą.

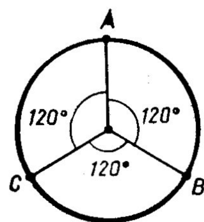
3 teorema. ***Dvi skirtingos sferinės tiesės*** (t. y. didieji apskritimai) ***visada susikerta dviejuose diametraliai priešinguose taškuose.***

Įrodymas. Jei α ir β yra skirtingų sferos (O, R) didžiųjų apskritimų plokštumos, tai $O \in \alpha$ ir $O \in \beta$. Todėl plokštumų α ir β sankirta yra tiesė l, einanti per sferos centrą. Tiesė l kerta sferą dviejuose diametraliai priešinguose taškuose, kurie ir bus bendrieji nagrinėjamų didžiųjų apskritimų taškai.

Iš tos teoremos aišku, kad sferinėje geometrijoje lygiagretumo sąvoka negali būti turininga, nes joje nėra skirtingų lygiagrečių tiesių. Tokiu atveju, suprantama, nėra prasmės kalbėti apie lygiagretumo aksiomą ir lygiagretųjį postūmį.

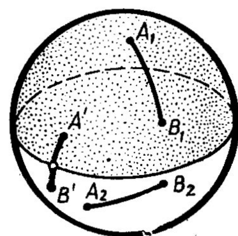
Planimetrijoje vienas iš trijų taškų, priklausančių vienai tiesei, yra tarp kitų dviejų taškų (jei, pavyzdžiui, taškas B yra tarp A ir C, tai tas reiškia, kad $|AB|+|BC|=|AC|$; tuomet taškas B priklauso atkarpai AC). Sferinėje geometrijoje sąvokos „būti tarp“ apibrėžti neįmanoma: pavyzdžiui, kai taškai A, B ir C priklauso didžiajam apskritimui ir atskirti 120° lankais (7 pav.), negalima sakyti, kad kuris nors tų taškų yra tarp kitų dviejų (paaiškinkite).

Negriežtai kalbant, tai galima aiškinti šitaip: planimetrijoje taškas padalija tiesę į dvi „atskiras" aibes — atviruosius spindulius, o apie sferinę tiesę to nepasakysi. Vadinasi, apie aksiomas, nusakančias taškų tvarką sferinėse tiesėse, kalbėti netenka.



7 pav.

Vienoje planimetrijos aksiomoje sakoma: kiekviena tiesė dalija plokštumą į dvi atviras pusplokštumes, t. y. į dvi tokias netuščias aibes, kad atkarpa AB, kurios galai A ir B priklauso skirtingoms aibėms, kerta šią tiesę, o atkarpa, kurios galai priklauso vienai aibei, šios tiesės nekerta. Lengva įsitikinti, kad šitas teiginys tinka ir sferinei geometrijai: didysis apskritimas dalija sferą į atviras pussferes, atitinkančias nurodytuosius reikalavimus (8 pav.). Tai griežtai įrodoma, remiantis stereometrijos aksiomomis (įrodykite patys).



8 pav.

Aptarėme visas planimetrijos aksiomas, išskyrus vadinamąją slankumo aksiomą (apie ją bus kalbama 4 paragrafe). Matome, kad vienų aksiomų teiginiai teisingi arba „beveik" teisingi ir sferinėje geometrijoje, o kitų aksiomų tenka atsisakyti. Sferinę geometriją galima laikyti geometrijos modeliu, kuriam netinka keletas įprastų geometrijos aksiomų, todėl ji yra paprasčiausias neeuklidinės geometrijos modelis.

Apskritai geometrijos modeliu vadinama taškų aibė su iš jos išskirta poaibių, vadinamų tiesėmis, sistema. Geometrijos modeliai atsiranda, tiriant aplinkos geometrines savybes, abstrahuojantis nuo bet kurių fizinių ir kitų negeometrinių savybių. Pavyzdžiui, nagrinėjant Žemės paviršiaus geometriją palyginti nedidelėse „plokščiose" srityse, atsirado paprastoji euklidinė geometrija (planimetrija). Kaip sakėme anksčiau, tenkinant astronomijos bei navigacijos poreikius, buvo sukurta sferinė geometrija, kurios vieni teiginiai yra panašūs į planimetrijos teiginius, o kiti iš esmės skiriasi nuo planimetrijos teiginių. Geometrijų su skirtingomis savybėmis modelius galima įsivaizduoti ir visiškai abstrakčiai, abstrahuojantis nuo realaus pasaulio geometrinių savybių. Tokie modeliai padeda analizuoti įvairių geometrinių sąvokų esmę ir jų ryšius.

Pratimai

7. Dvi sferines tieses, kurių sudarytas kampas yra status, vadiname statmenomis. Išsiaiškinkite, ar sferinėje geometrijoje

teisinga, ar beveik teisinga, ar visiškai klaidinga ši teorema: per nurodytąjį tašką eina vienintelė tiesė, statmena nurodytai tiesei.

8. Išsiaiškinkite, ar sferinėje geometrijoje teisingas šis teiginys: taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų taškų A ir B, aibė yra atkarpos AB vidurio statmuo.

9. Apskritimu sferinėje geometrijoje vadiname sferos pjūvį, gautą, perkirtus sferą plokštuma, neinančia per jos centrą. Įrodykite, kad sferinis apskritimas yra aibė, sudaryta iš taškų, nutolusių nuo duoto sferos taško (centro) nurodytu sferiniu atstumu (sferiniu spinduliu). Kaip rasti sferinio apskritimo paprastą spindulį r, kai žinomas jo sferinis spindulys ϱ ir sferos spindulys R?

10. Skriestuvu rutulio paviršiuje galima brėžti apskritimus. Brėždami skriestuvu rutulio paviršiuje ir liniuote bei skriestuvu plokštumoje, raskite rutulio spindulį, t. y. nubrėžkite atkarpą, kurios ilgis lygus rutulio spinduliui.

11. Kaip rutulio paviršiuje skriestuvu nubrėžti didįjį apskritimą, einantį per du duotus taškus?

12. a) Ar tiesa, kad apie kiekvieną sferinį trikampį galima apibrėžti apskritimą? b) Ar tiesa, kad į kiekvieną sferinį trikampį galima įbrėžti apskritimą?

§ 3. SFERINĖ TRIGONOMETRIJA

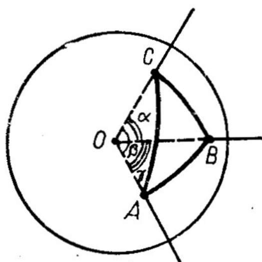
Kiekvieno plokštumos trikampio kraštinių ilgius ir kampų didumus sieja tam tikros priklausomybės, kurių svarbiausios yra vadinamosios kosinusų ir sinusų teoremos:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C},$$

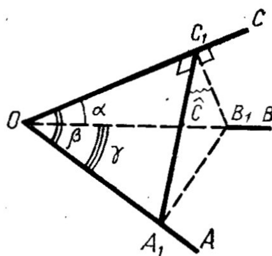
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}.$$

Šiose formulėse a, b ir c reiškia trikampio ABC kraštinių, esančių prieš atitinkamus kampus A, B ir C, ilgius. Žinodami tris trikampio elementus — kraštinių ilgius ir kampus, pagal pateiktas formules galime rasti tris kitus elementus. Jos taikomos praktiniams uždaviniams spręsti, pavyzdžiui, geodezijoje. Šiame paragrafe išvesime analogiškas sferinio trikampio elementų priklausomybes.

Primename, kad sferinį trikampį ABC, nubrėžtą sferoje (O, R), atitinka trisienis kampas $OABC$ (9 pav.). To trikampio kampų A, B ir C didumai lygūs trisienio kampo dvisienių kampų prie atitinkamų briaunų OA, OB ir OC didumams, o prieš tuos kampus esančių kraštinių ilgiai a, b ir c su atitinkamais trisienio kampo plokščiaisiais kampais $\alpha=\widehat{BOC}$, $\beta=\widehat{AOC}$ ir $\gamma=\widehat{AOB}$ siejami



9 pav.



10 pav.

lygybėmis $a=R\alpha$, $b=R\beta$ ir $c=R\gamma$ (žr. § 1, 2 teorema). Kadangi sferos spindulio R reikšmė fiksuota, tai vietoj kraštinių ilgių a, b ir c nagrinėsime plokščiuosius kampus α, β ir γ.

Sferinio trikampio arba trisienio kampo kosinusų teoremą turime gauti, spręsdami tokį uždavinį: žinant plokščiuosius kampus α ir β bei dvisienį kampą $\widehat{C}$, esantį tarp jų, reikia rasti trisienio kampo $OABC$ trečią plokščiąjį kampą γ (10 pav.). Paaiškinsime, kaip sprendžiamas šis uždavinys.

Savaime aišku, kad, norint rasti kampą γ, reikia remtis paprastąja kosinusų teorema, taikoma kuriam nors trikampiui OA_1B_1, kurio $A_1 \in [OA)$, $B_1 \in [OB)$. Kad galėtume atsižvelgti į žinomą dvisienį kampą, imsime bet kurį briaunos OC tašką C_1 ir sudarysime dvisienio kampo, esančio prie tos briaunos, tiesinį kampą $A_1C_1B_1$. Tuo tikslu atitinkamų sienų plokštumose nubrėšime statmenas briaunai OC tieses C_1A_1 ir C_1B_1, kurios kerta briaunas OA ir OB taškuose A_1 ir B_1:

$$(C_1A_1) \perp (OC), \quad (C_1B_1) \perp (OC)$$

(10 pav.); kol kas tariame, kad plokštieji kampai α ir β yra smailūs. Dabar reikia du kartus pritaikyti kosinusų teoremą: iš pradžių — trikampiui $A_1C_1B_1$, o paskui — trikampiui OA_1B_1. Dabar apskaičiuosime.

Jei $|OC_1|=z$, tai $|C_1A_1|=z \operatorname{tg} \beta$, $|C_1B_1|=z \operatorname{tg} \alpha$. Kadangi $A_1\widehat{C_1}B_1=\widehat{C}$, tai

$$|A_1B_1|^2=z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha+ z^2 \operatorname{tg}^2 \beta-2z^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos \widehat{C}. \qquad (1)$$

Antra vertus, kadangi

$$|OA_1|=\frac{z}{\cos \beta}, \quad |OB_1|=\frac{z}{\cos \alpha}, \quad A_1\widehat{O}B_1=\gamma,$$

taikome kosinusų teoremą trikampiui OA_1B_1:

$$|A_1B_1|^2=\frac{z^2}{\cos^2\alpha}+\frac{z^2}{\cos^2\beta}-2z^2\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}\cos \gamma . \qquad (2)$$

Sujungę (1) ir (2) formulių dešiniąsias puses lygybės ženklu ir pritaikę žinomą tapatybę

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}=1+\mathrm{tg}^2\,\varphi,$$

gauname

$$z^2\mathrm{tg}^2\,\alpha+z^2\mathrm{tg}^2\,\beta-2z^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\cos\widehat{C}=$$
$$=z^2(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)+z^2(1+\mathrm{tg}^2\,\beta)-2z^2\frac{1}{\cos\alpha\,\cos\beta}\cos\gamma.$$

Iš šios lygybės po suprastinimo gauname:

$$-2\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\cos\widehat{C}=2-2\frac{1}{\cos\alpha\,\cos\beta}\cos\gamma,$$

$$-\sin\alpha\sin\beta\cos\widehat{C}=\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma.$$

Vadinasi, galutinai

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\widehat{C}. \qquad (3)$$

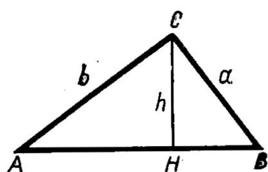
Tai ir yra garsioji sferinės trigonometrijos kosinusų teorema. Nors ją išvesdami tarėme, kad $\alpha<\frac{\pi}{2}$ ir $\beta<\frac{\pi}{2}$, bet lengva patikrinti, kad ji tinka bet kuriam trisieniam kampui arba sferiniam trikampiui — įsitikinkite tuo patys, išnagrinėję kitus atvejus. (Kitas (3) formulės išvedimas pateiktas geometrijos vadovėlio IX—XI klasei „Priede“.)

Dabar išvesime sferinio trikampio elementus siejančią formulę, analogišką sinusų teoremai, tik pirma priminsime vieną būdą plokščiojo trikampio sinusų teoremai įrodyti. Nubrėžus trikampio ABC aukštinę CH (11 pav.), lengva įsitikinti, kad tos aukštinės ilgį su prieš ją esančių kraštinių ilgiais sieja lygybės $|CH|=$ $=b\sin\widehat{A}=a\sin\widehat{B}$, nepriklausančios nuo kampų A ir B didumo. Iš tų lygybių gauname

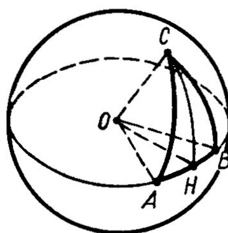
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}.$$

Panašiai išvedama ir antroji sinusų teoremos lygybė.

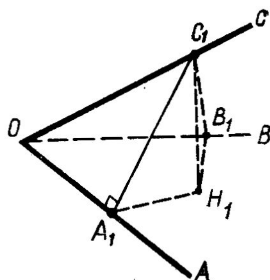
Sferiniame trikampyje ABC irgi galima nubrėžti aukštinę CH — didžiojo apskritimo lanką, statmeną didžiajam apskritimui AB (12 pav.). Aukštinės ilgį $|CH|_s$ atitinka kampo COH didumas: jei $\widehat{COH}=\varphi$, tai $|CH|_s=R\varphi$. Iš to sprendžiame, kokią figūrą reikia nubraižyti sferinio trikampio trisieniame kampe. Kol kas tariame, kad kampai α, β, $\widehat{A}$ ir $\widehat{B}$ yra smailūs, pasirenkame bet kurį briaunos OC tašką C_1 ir per jį nubrėžiame tiesę C_1A_1, statmeną



11 pav.



12 pav.



13 pav.

briaunai OA, tiesę C_1B_1, statmeną briaunai OB, ir tiesę C_1H_1, statmeną plokštumai OAB (13 pav.).

Remdamiesi trijų statmenų teorema, įsitikiname, kad $(H_1A_1)\perp$ $\perp(OA)$, $(H_1B_1)\perp(OB)$. Todėl kampai $C_1A_1H_1$ ir $C_1B_1H_1$ yra atitinkamų dvisienių kampų tiesiniai kampai: $C_1\widehat{A}_1H_1=\widehat{A}$, $C_1\widehat{B}_1H_1=$ $=\widehat{B}$. Iš stačiųjų trikampių OA_1C_1 ir $C_1A_1H_1$, kai $|OC_1|=z$, gauname

$$|C_1H_1|=z\sin\beta\sin\widehat{A}. \qquad (4)$$

Iš stačiųjų trikampių OB_1C_1 ir $C_1H_1B_1$ analogiškai gauname

$$|C_1H_1|=z\sin\alpha\sin\widehat{B}. \qquad (5)$$

Dešiniąsias (4) ir (5) lygybių puses sujungę lygybės ženklu, turime

$$\sin\beta\sin\widehat{A}=\sin\alpha\sin\widehat{B}.$$

Iš šios lygybės išplaukia

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\widehat{A}}=\frac{\sin\beta}{\sin\widehat{B}}.$$

Panašiai įrodoma, kad

$$\frac{\sin\beta}{\sin\widehat{B}}=\frac{\sin\gamma}{\sin\widehat{C}}.$$

Galų gale gaunama formulė

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\widehat{A}}=\frac{\sin\beta}{\sin\widehat{B}}=\frac{\sin\gamma}{\sin\widehat{C}}, \qquad (6)$$

kuri ir išreiškia sferinio trikampio arba trisienio kampo sinusų teoremos turinį. Ir šiuo atveju galima įsitikinti, kad ši teorema tinka bet kuriam sferiniam trikampiui (ypatingą dėmesį reikia skirti

atvejui $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$, nes šiuo atveju sferinio trikampio ABC aukštinė CH nėra vienareikšmiškai apibrėžta).

Baigdami aptarsime, kas bendra tarp planimetrinės sinusų ir kosinusų teoremų bei atitinkamų sferinės geometrijos teoremų. Matome, kad iš pažiūros plokštumos kosinusų formulė net nepanaši į sferos kosinusų formulę. Antra vertus, mažą sferos dalelę galima laikyti „beveik" plokščia. Vadinasi, kai sferinio trikampio kraštinių ilgiai labai maži, lyginant juos su sferos spinduliu, sferinė kosinusų formulė turi „beveik" sutapti su planimetrijos kosinusų formule. Tas pats turėtų būti ir su sinusų teorema. Patikrinsime, ar tai tiesa.

Sferinio trikampio ABC kraštinių ilgius a, b ir c su atitinkamais trisienio kampo plokščiaisiais kampais α, β ir γ sieja lygybės $\alpha=\frac{a}{R}$, $\beta=\frac{b}{R}$ ir $\gamma=\frac{c}{R}$. Todėl šiuo atveju (kai a, b ir c daug mažesni už R) turi būti $\alpha\approx 0$, $\beta\approx 0$ ir $\gamma\approx 0$. Prisiminkime, kad $\sin\varphi$ reikšmė, kai φ labai mažas, apytiksliai lygi φ:

$$\sin\varphi\approx\varphi\left(\text{arba } \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=1\right).$$

Tuo remdamiesi, galime išvesti analogišką apytikslę formulę, kuri $\cos\varphi$ išreiškia mažu φ:

$$\cos\varphi=1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\approx 1-2\cdot\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2=1-\frac{\varphi^2}{2}.$$

Parašę atitinkamus artinius sinusų ir kosinusų formulėse ((6) ir (3) formulėse), gauname apytiksles formules, tinkamas mažiems sferiniams trikampiams:

$$\frac{\alpha}{\sin\widehat{A}}\approx\frac{\beta}{\sin\widehat{B}}\approx\frac{\gamma}{\sin\widehat{C}},$$

$$1-\frac{\gamma^2}{2}\approx\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)+\alpha\beta\cos\widehat{C}.$$

Iš antros apytikslės lygybės, atmetę ketvirtojo laipsnio dėmenį $\frac{\alpha^2\beta^2}{4}$ (jis labai mažas palyginti su antrojo laipsnio dėmenimis γ^2, α^2, β^2 ir $\alpha\beta\cos\widehat{C}$), gauname

$$1-\frac{\gamma^2}{2}\approx 1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2}{2}+\alpha\beta\cos\widehat{C},$$

arba

$$\gamma^2\approx\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\widehat{C}.$$

Jei išvestose apytikslėse formulėse kampus α, β ir γ pakeisime jiems lygiais santykiais $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$ ir $\frac{c}{R}$, tai iš tikrųjų gausime žinomas sinusų ir kosinusų teoremas!

Pratimai

13. Raskite trisienio kampo plokščiąjį kampą γ, kai $\alpha=\beta=45°$, $\widehat{C}=90°$.

14. Parašykite Pitagoro teoremos analogą, taikomą statiesiems sferiniams trikampiams ir trisieniams kampams. Patikrinkite, ar iš parašytos formulės, kai sferinis trikampis labai mažas, išplaukia paprastoji Pitagoro teorema.

Tolesniuose uždaviniuose (15—17) nagrinėjami poliniai trisieniai kampai.

15. Sakykime, $OABC$ — duotas trisienis kampas. Išveskime spindulius OA^*, OB^* ir OC^*, statmenus atitinkamoms plokštumoms OBC, OAC ir OAB; spinduliai OA^* ir OA, OB^* ir OB, OC^* ir OC turi būti skirtingose pusėse nuo tų plokštumų. Trisienis kampas $OA^*B^*C^*$, kurio briaunos yra OA^*, OB^* ir OC^*, vadinamas poliniu trisienio kampo $OABC$ atžvilgiu. Įrodykite, kad kampo $OA^*B^*C^*$ polinis kampas sutampa su $OABC$.

16. Raskite polinio kampo $OA^*B^*C^*$ elementus α^*, β^*, γ^*, $\widehat{A}^*$, $\widehat{B}^*$ ir $\widehat{C}^*$, kai žinomi pradinio kampo $OABC$ elementai α, β, γ, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ ir $\widehat{C}$.

17. Įrodykite, kad bet kurio trisienio kampo elementai siejami lygybe

$$\cos\widehat{C} = -\cos\widehat{A}\cos\widehat{B} + \sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\cos\gamma$$

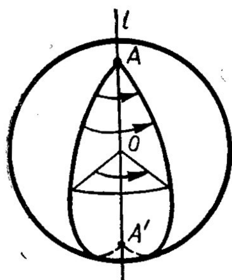
(ji kartais vadinama antrąja kosinusų teorema).

18. Yra žinoma, kad trisienio kampo plokščiųjų kampų suma $\alpha+\beta+\gamma$ gali kisti nuo 0 iki 2π. Kokiame intervale gali kisti trisienio kampo dvisienių kampų suma $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}$?

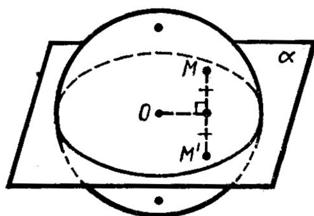
§ 4. SFEROS POSLINKIAI

Sferos poslinkio apibrėžimas visiškai panašus į plokštumos poslinkio apibrėžimą, būtent, sferos poslinkiu vadinamas jos atvaizdis f į ją pačią, kuris nekeičia atstumo tarp bet kurių sferos taškų:

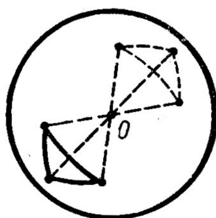
$$\text{jei } A'=f(A),\ B'=f(B), \text{ tai } |A'B'|_s=|AB|_s.$$



14 pav.



15 pav.



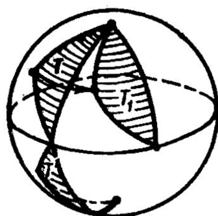
16 pav.

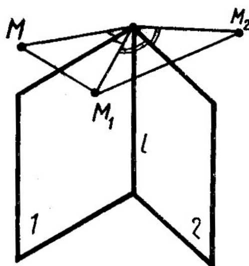
Paprasčiausias sferos poslinkio pavyzdys yra sferos posūkis apie ašį, einančią per sferos centrą. Šis sferos posūkis skiriasi nuo plokštumos posūkio tuo, kad turi du „centrus" — du diametraliai priešingus taškus A ir A' (14 pav.), kurie yra to posūkio nejudami taškai. Sferos simetrija plokštumos α, einančios per sferos centrą, atžvilgiu irgi yra sferos poslinkis. Ši transformacija visiškai analogiška plokštumos ašinei simetrijai: simetrijos ašis čia yra didysis apskritimas, kuris gaunamas, sferą kertant plokštuma α (15 pav.). Pagaliau sfera atvaizduojama į ją pačią centrine simetrija Z_O, kai simetrijos centras O yra sferos centras (16 pav.).

Kongruenčiomis sferinėmis figūromis vadinamos dvi sferinės figūros Φ_1 ir Φ_2, kurių pirmąją sferos poslinkis (kai jis egzistuoja) atvaizduoja į antrą figūrą. Rašoma: $\Phi_1 \cong \Phi_2$. Pavyzdžiui, 17 paveiksle pavaizduoti trikampiai T, T_1 ir T' yra kongruentūs (išvardykite atitinkamus poslinkius). Atkreipkime dėmesį, kad trikampio T, „iškirpto" iš sferos, neįmanoma „uždėti" ant trikampio T', kaip neįmanoma sutapatinti kairės ir dešinės rankos plaštakų. Tokias kongruenčiąsias figūras kartais vadiname veidrodiškai kongruenčiomis (pabrėžiame, kad plokštumoje tokių figūrų nėra, nes plokščią figūrą visada galima „uždėti" ant jai kongruenčios figūros; tiesa, tam reikalui kartais reikia pirmą figūrą iškelti į erdvę).

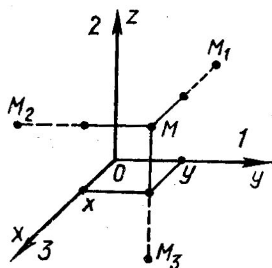
Kaip ir planimetrijoje, dviejų sferos poslinkių kompozicija visada yra sferos poslinkis. Išnagrinėsime keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys. Lengva įsitikinti, kad kompozicija $S_2 \circ S_1$, kurią sudaro dvi simetrijos plokštumų „1" ir „2" atžvilgiu, yra posūkis apie tiesę l — tų plokštumų susikirtimo tiesę (18 pav.). Jei plokštumos sudaro kampą φ, tai posūkio kampas lygus 2φ (žr. 18 pav.). Žinoma, teisingas ir atvirkščias teiginys: posūkį R^{φ} apie ašį l kampu φ galima išreikšti simetrijų dviejų plokštumų


17 pav.



18 pav.



19 pav.

atžvilgiu kompozicija: simetrijų plokštumos eina per tiesę l, sudarydamos kampą $\frac{\varphi}{2}$.

2 pavyzdys. Tarkime, kad „1", „2" ir „3" yra viena kitai statmenos plokštumos, susikertančios taške O. Jas laikysime koordinačių plokštumomis Oyz, Oxz ir Oxy (19 pav.). Jei taško M koordinatės yra (x, y, z), tai simetrija $S_1 = S_{Oyz}$ keičia taško M abscisę priešingu skaičiumi:

$$S_1(M(x, y, z)) = M_1(-x, y, z).$$

Analogiškai $S_2(M(x, y, z)) = M_2(x, -y, z)$ ir $S_3(M(x, y, z)) = M_3(x, y, -z)$. Vadinasi, atlikus visų trijų simetrijų kompoziciją (bet kuria eile), taškas $M(x, y, z)$ pereis į tašką $M'(-x, -y, -z)$, t. y. į tašką, simetrišką pradiniam taškui centro O atžvilgiu. Todėl ta kompozicija yra centrinė simetrija Z_O:

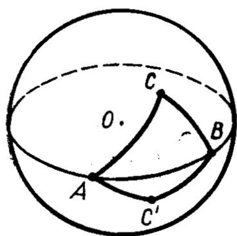
$$S_3 \circ S_2 \circ S_1 = Z_O.$$

Pabrėžiame, kad šiuo atveju plokštumų „1", „2" ir „3" tarpusavio statmenumas yra esminė sąlyga.

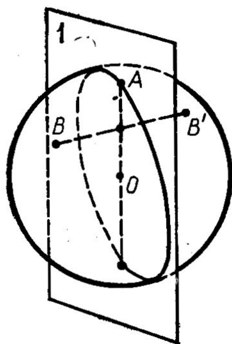
Pasirodo, kad kiekvienas sferos poslinkis yra kompozicija, kurią sudaro simetrijos plokštumų atžvilgiu. Teisingas šitoks teiginys.

Lema. *Kiekvienas sferos (O, R) poslinkis f yra arba tapačioji transformacija E, t. y. $f(M) = M$, esant bet kuriam taškui M, arba simetrija plokštumos atžvilgiu, arba dviejų ar trijų simetrijų plokštumų atžvilgiu kompozicija: arba $f = E$, arba $f = S_1$, arba $f = S_2 \circ S_1$, arba $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$.*

Įrodydami šią lemą, remsimės tokia prielaida: jei A, B ir C yra trys sferos taškai, nepriklausantys vienam didžiajam apskritimui, o taškai A', B' ir C' pasirinkti tokie, kad $|A'B'|_s = |AB|_s$, $|A'C'|_s = |AC|_s$, $|B'C'|_s = |BC|_s$, t. y. sferinių trikampių ABC ir $A'B'C'$



20 pav.



21 pav.

atitinkamų kraštinių ilgiai lygūs, tai egzistuoja ne daugiau kaip vienas sferos poslinkis, kuriuo taškas A atvaizduojamas į tašką A', taškas B — į B', o taškas C — į C'.

Vaizdžiai tas teiginys aiškus. Iš tikrųjų, jei tašką A sutapdinsime su tašku A', o B — su B', tai taškas C sutaps arba su tašku C', arba su tašku C'', simetrišku taškui C' plokštumos $OA'B'$ atžvilgiu (20 pav.). Kadangi žinome, jog taškas C turi būti atvaizduotas į C', tai gali būti tik taip: $C \to C'$ (kitų sferos taškų vaizdai randami vienareikšmiškai).

L e m o s į r o d y m a s. Sakykime, f yra bet kuris sferos poslinkis. Pasirinkime tris sferos taškus A, B ir C, nepriklausančius vienam didžiajam apskritimui, ir raskime jų vaizdus A', B' ir C', gaunamus poslinkiu f. Šitie taškai atitinka ką tik suformuluotos prielaidos sąlygas.

Pagrindinė tolesnio samprotavimo mintis yra tokia: simetrijomis plokštumų atžvilgiu reikia paeiliui atvaizduoti tašką A į tašką A', tašką B — į B', o tašką C — į C'. Tam reikės ne daugiau kaip trijų simetrijų, o jų kompozicija visi trys taškai A, B ir C bus atvaizduoti į atitinkamus taškus A', B' ir C'. Kadangi bet kuri simetrijų kompozicija yra poslinkis, tai iš prielaidos, kad yra tik vienas poslinkis, kuriuo taškai A, B ir C atvaizduojami į atitinkamus taškus A', B' ir C', išplauks, jog f sutampa su gautąja kompozicija.

Paeiliui nagrinėdami visus galimus atvejus, sudarysime simetrijų kompozicijas.

I a t v e j i s. $A'=A$, $B'=B$, $C'=C$.

Savaime aišku, kad šiuo atveju $f=E$.

II a t v e j i s. $A'=A$, $B'=B$, $C'\neq C$.

Kadangi taškai C ir C' yra vienodai nutolę nuo taškų A ir B, tai jie yra simetriški plokštumos „1“$=(OAB)$ atžvilgiu (žr. 20 pav.). Todėl simetrija S_1 taškai A, B ir C atvaizduojami į $A'=A$, $B'=B$ ir C'. Vadinasi, šiuo atveju $f=S_1$.

III a t v e j i s. $A'=A$, $B'\neq B$, $C'\neq C$.

Išveskime taškų B ir B' simetrijos plokštumą. Tai plokštuma „1“, statmena atkarpai BB' ir einanti per jos vidurį (21 pav.).

Plokštumą „1“ sudaro taškai, vienodai nutolę nuo taškų B ir B' („Geometrija IX—XI klasei“, 279 uždavinys), todėl sferos centras O ir taškas $A=A'$ priklauso tai plokštumai ($|OB|=|OB'|=R$, $|AB|=|A'B'|=|AB'|$, nes $|AB|_s=|A'B'|_s$ ir $A'=A$). Vadinasi, sferą (O, R) simetrija S_1 atvaizduoja į ją pačią ($O \in$ „1“), o taškus A ir B — į taškus $A'=A$ ir B'. O štai taškas C (žr. 20 pav.) atvaizduojamas arba į C' (tuomet $f=S_1$), arba į tašką C''. Antruoju atveju panaudojame simetriją S_2 plokštumos „2“ $=(OA'B')$ atžvilgiu. Kompozicija $S_2 \circ S_1$ taškus A, B ir C atvaizduoja į taškus A', B' ir C', todėl $f=S_2 \circ S_1$.

IV atvejis. $A' \neq A$, $B' \neq B$, $C' \neq C$.

Išveskime taškų A ir A' simetrijos plokštumą; sakykime, tai plokštuma „1“. Taškas A simetrija S_1 atvaizduojamas į A', o taškai B ir C — į kokius nors taškus B_1 ir C_1. Gali atsitikti, kad $B'=B_1$, $C'=C_1$; tuomet $f=S_1$. Jei $B_1=B'$, o $C_1 \neq C'$, tai samprotaujame, kaip II atveju; tuomet $f=S_2 \circ S_1$, jei „2“ $=(OA'B')$. Pagaliau, jei $B_1 \neq B'$ ir $C_1 \neq C'$, tai samprotaujame, kaip III atveju. Tuomet arba $f=S_2 \circ S_1$ („2“ — taškų B_1 ir B' simetrijos plokštuma), arba $f=S_3 \circ S_2 \circ S_1$ („2“ — ta pati plokštuma, o „3“ $=(OA'B')$).

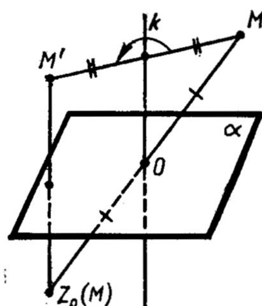
Lema įrodyta.

Remdamiesi įrodytąja lema, galime suklasifikuoti sferos poslinkius: arba $f=E$ — tapačioji transformacija, arba $f=S_1$ — simetrija, arba $f=S_2 \circ S_1=R_l^{\varphi}$ — posūkis (žr. 1 pavyzdį). Reikia dar išnagrinėti atvejį $f=S_3 \circ S_2 \circ S_1$. Pasirodo, teisingas šitoks teiginys.

4 (Oilerio) teorema. ***Kiekvienas sferos poslinkis yra arba tapačioji transformacija, arba posūkis apie ašį, arba simetrija plokštumos atžvilgiu, arba sukamoji simetrija.***

(Posūkio R_k^{ω} ir simetrijos S_α kompoziciją vadinsime sukamąja simetrija tada, kai posūkio ašis k statmena simetrijos plokštumai α; paprastąją simetriją galima laikyti atskiru sukamosios simetrijos atveju: $\omega=0$.)

Įrodymas. Dar reikia išnagrinėti vienintelį atvejį, kai sferos poslinkis f išreiškiamas trijų simetrijų kompozicija, t. y. $f=S_3 \circ S_2 \circ S_1$. Dviejų simetrijų kompozicija $S_2 \circ S_1$ yra posūkis R_l^{φ} apie tiesę l, plokštumų „1“ ir „2“ sankirtą. Ši kompozicija nesikeičia, kai plokštumas „1“ ir „2“ pasukame bet kuriuo kampu apie tiesę l (po posūkio plokštumos sudaro tą patį kampą $\frac{\varphi}{2}$; žr. 1 pavyzdį). Pasukime plokštumas „1“ ir „2“, kad plokštuma „2“



22 pav.

pasidarytų statmena plokštumai „3" (paaiškinkite, kaip tai padaryti). Paskui išveskime dar vieną sferos simetrijos plokštumą, statmeną plokštumoms „2" ir „3". Tarkime, kad tai plokštuma „0". Kompozicija $S_0 \circ S_0$ yra tapačioji transformacija E, todėl poslinkį f galima išreikšti šitaip:

$$f = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = S_3 \circ S_2 \circ E \circ S_1 = \\ = S_3 \circ S_2 \circ (S_0 \circ S_0) \circ S_1 = (S_3 \circ S_2 \circ S_0) \circ \\ \circ (S_0 \circ S_1).$$

Kadangi plokštumos „0", „2" ir „3" yra viena kitai statmenos, tai $S_3 \circ S_2 \circ S_0$ yra centrinė simetrija Z_0 (žr. 2 pavyzdį). Kompozicija $S_0 \circ S_1$ yra posūkis R_k^φ apie plokštumų „0" ir „1" sankirtos tiesę k. Todėl $f = Z_0 \circ R_k^\varphi$.

Dabar išveskime sferos simetrijos plokštumą α, statmeną ašiai k. Iš 22 paveikslo matyti, kad centrinė simetrija Z_0 yra ašinės simetrijos R_k^π ir simetrijos S_α kompozicija: $Z_0 = S_\alpha \circ R_k^\pi$. Vadinasi, nagrinėjamą poslinkį f galima išreikšti šitaip:

$$f = Z_0 \circ R_k^\varphi = (S_\alpha \circ R_k^\pi) \circ R_k^\varphi = S_\alpha \circ (R_h^\pi \circ R_k^\varphi) = S_\alpha \circ R_k^\omega,$$

jei $\omega = \pi + \varphi$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Baigdami pabrėšime, jog, įrodydami lemą, įsitikinome, kad sferiniai trikampiai, kurių kraštinių ilgiai atitinkamai lygūs, yra kongruentūs. Analogišku samprotavimu galima išvesti dar du sferinių trikampių kongruentumo požymius — pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų, pagal kraštinę ir du kampus prie jos. Pasirodo, sferinėje geometrijoje yra dar vienas trikampių kongruentumo požymis — pagal tris kampus (žr. toliau 26 ir 27 uždavinius).

Pratimai

19. Įrodykite, kad bet kurių aibės M atvaizdžių f_1, f_2, f_3 į tą pačią aibę kompozicijos yra susietos lygybe

$$(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1).$$

(Atskiru atveju tai teisinga, kalbant apie sferos, plokštumos arba erdvės poslinkius. Tuo faktu rėmėmės 4 paragrafe: trijų ir daugiau simetrijų kompoziciją rašėme be skliaustų arba skliautėme mums reikiamu būdu.)

20. Sugalvokite pavyzdį, rodantį, kad dviejų sferos poslinkių f ir g kompozicija $g \circ f$ gali skirtis nuo kompozicijos $f \circ g$. (Per-

tvarkydami kompozicijos užrašą, 4 paragrafe niekada nekeitėme poslinkių vietomis!)

21. Koks erdvės poslinkis yra kompozicija $S_\beta \circ S_\alpha$, kai S_α ir S_β — simetrijos lygiagrečių plokštumų α ir β atžvilgiu?

22. Įrodykite, kad dviejų sferos posūkių kampu π apie statmenas ašis kompozicija yra posūkis tuo pačiu kampu π apie ašį, statmeną dviem pirmosioms ašims.

23. Įrodykite, kad dviejų sferos posūkių kompozicija $R_l^\varphi \circ R_k^\varphi$ irgi yra sferos posūkis. Paaiškinkite, kaip nubrėžti gaunamo posūkio ašį.

22—23 uždavinių n u r o d y m a s: abu posūkius išreikškite kompozicijomis, sudarytomis iš simetrijų tinkamai parinktų plokštumų atžvilgiu.

24. Kiek egzistuoja erdvės poslinkių, kuriais: a) taisyklingas tetraedras atvaizduojamas į jį patį; b) kubas atvaizduojamas į jį patį?

25. Tarkime, kad sferos poslinkis f išreiškiamas sukamąja simetrija $S_\alpha \circ R_k^\omega$, $\alpha \perp k$. Ar vienareikšmiškai apibrėžta šios išraiškos plokštuma α ir ašis k?

26. Įrodykite teiginį. Jei vieno sferinio trikampio kampai atitinkamai lygūs kito sferinio trikampio kampams, tai tie trikampiai yra kongruentūs.

N u r o d y m a s. Iš pradžių įrodykite: jei du trisieniai kampai kongruentūs, tai jų poliniai trisieniai kampai kongruentūs.

27. Ar egzistuoja sferos panašumo transformacijos, t. y. tokie sferos atvaizdžiai f į ją pačią, kad, imant bet kuriuos taškus A ir B,

$$|f(A)f(B)|_s = k|AB|_s \text{ ir } k \neq 1,\ k \neq 0?$$

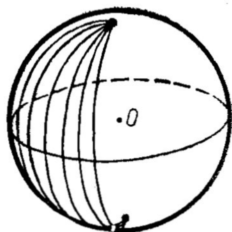
§ 5. SFERINIŲ DAUGIAKAMPIŲ PLOTAI IR OILERIO FORMULĖ

Primename, kad plokštumos daugiakampio Φ plotu vadiname teigiamą dydį $S(\Phi)$, apibrėžtą visų daugiakampių aibėje ir atitinkantį šias sąlygas („ploto aksiomas“):

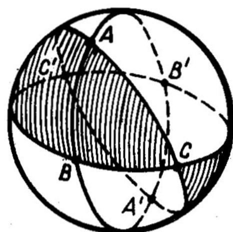
a) jei Φ_1 ir Φ_2 yra kongruentūs daugiakampiai, tai $S(\Phi_1) = S(\Phi_2)$;

b) jei daugiakampiai Φ_1 ir Φ_2 neturi bendrų vidinių taškų (t. y. susikerta tik kraštu), o Φ yra jų sąjunga, tai

$$S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2);$$



23 pav.



24 pav.

c) jei kvadrato K kraštinės ilgis lygus 1, tai jo plotas laikomas ploto vienetu, t. y. $S(K)=1$.

Nesudėtingais samprotavimais iš tų sąlygų išvedamos stačiakampio, lygiagretainio, trikampio ir trapecijos ploto formulės.

Panašiai apibrėžiama ir sferinio daugiakampio Φ ploto $S(\Phi)$ sąvoka; sąlygos a) ir b) pakartojamos pažodžiui. Sferos (O, R) daugiakampių ploto vienetą natūralu parinkti taip, kad visos sferos plotas būtų lygus $4\pi R^2$. Išvesime sferinių daugiakampių ploto formules. Pradedame nuo dvikampio.

Pirmiausia matome, kad sferą galima padalyti į 360 dvikampių, kurių kampo didumas lygus 1°; tam užtenka per tiesę AA' (A ir A' — diametraliai priešingi taškai) išvesti plokštumas, sudarančias 1° kampus (tai schemiškai pavaizduota 23 paveiksle). Visi tie dvikampiai kongruentūs, nes kiekvienas jų atvaizduojamas į kitą atitinkamu posūkiu apie ašį AA'. Todėl tie dvikampiai turi vienodus plotus (sąlyga a)). Kadangi visų šių dvikampių sąjunga yra sfera, tai kiekvieno dvikampio plotas, atsižvelgiant į sąlygas b) ir c), turi būti lygus $4\pi R^2/360$. Jei dvikampio kampo didumas lygus $A°$, tai jo plotas turi būti A kartų didesnis už $4\pi R^2/360$. Todėl, dvikampio kampo radianinį matą žymint $\hat{A}$, galima rašyti:

$$S(AA') = \frac{A}{360} \cdot 4\pi R^2 = 2\left(2\pi \cdot \frac{A}{360}\right) R^2 = 2\hat{A}R^2. \qquad (1)$$

Išvedėme dvikampio ploto formulę.

Dabar rasime bet kurio sferinio trikampio ABC plotą $S(ABC)$. Nubrėžę didžiuosius apskritimus, kuriuose yra trikampio ABC kraštinės, pussferę (24 pav.) padalijame į 4 sferinius trikampius: ABC, ACB', BCA' ir $CB'A'$. Pagal sąlygą c) jų plotų suma lygi pussferės plotui $4\pi R^2/2=2\pi R^2$:

$$S(ABC)+S(ACB')+S(BCA')+S(CB'A')=2\pi R^2. \qquad (2)$$

Atkreipiame dėmesį į tai, kad trikampių ABC ir BCA' sąjunga yra dvikampis AA', kurio plotą jau apskaičiavome. Todėl

$$S(ABC)+S(BCA')=S(AA')=2\hat{A}R^2.$$

Analogiškai

$$S(ABC)+S(ACB')=S(BB')=2\hat{B}R^2.$$

Trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra kongruentūs, nes $A'B'C'$ simetriškas trikampiui ABC centro O atžvilgiu; todėl tų trikampių plotai lygūs. Kadangi trikampis $A'B'C'$ papildo trikampį $CB'A'$ iki dvikampio CC', tai

$$S(ABC)+S(CB'A')=S(A'B'C')+S(CB'A')=S(CC')=2\hat{C}R^2.$$

Iš paskutinių trijų formulių galima išreikšti trikampių BCA', ACB' ir $CB'A'$ plotus atitinkamų dvikampių plotais ir ieškomuoju plotu $S=S(ABC)$. Tas išraiškas parašę (2) lygybėje, gausime

$$S+(2\hat{B}R^2-S)+(2\hat{A}R^2-S)+(2\hat{C}R^2-S)=2(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})R^2-2S=$$
$$=2\pi R^2.$$

Iš čia gauname įdomią sferinio trikampio ploto formulę:

$$S(ABC)=(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi)R^2. \tag{3}$$

Pasirodo, sferinio trikampio plotą nusako jo kampų didumas! Iš (3) formulės, aišku, galima spręsti, kad kiekvieno sferinio trikampio kampų suma yra didesnė už π (palyginkite su 18 uždavinio rezultatu).

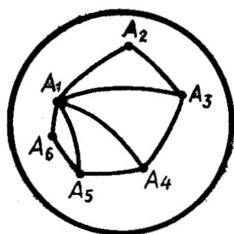
Dabar jau visiškai nesunku parašyti bet kurio iškilojo sferinio daugiakampio $A_1A_2\ldots A_n$ ploto formulę. Užtenka padalyti daugiakampį didžiųjų apskritimų lankais A_1A_3, A_1A_4, $\ldots$, A_1A_{n-1} į $(n-2)$ trikampius (25 pav.) ir sudėti visų gautų trikampių plotus:

$$S(A_1A_2\ \ldots\ A_n)=(\hat{A}_1+\hat{A}_2+\ldots+\hat{A}_n-(n-2)\pi)R^2=$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}A_i-(n-2)\pi\right)R^2 \tag{4}$$

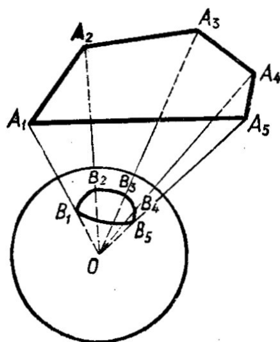
(Σ — sumos ženklas; indeksas i įgyja reikšmes nuo $i=1$ iki $i=n$).

Taikydami gautus rezultatus, išvesime garsiąją Oilerio formulę, siejamą su sferiniais „žemėlapiais“ ir iškilaisiais briaunainiais.

Sferiniu žemėlapiu vadiname bet kurį sferos skaidinį į nesikertančius iškiluosius sferinius daugiakampius (25 pav.). Vienas žemėlapių sudarymo būdas yra šitoks. Tarkime, kad Φ — bet kuris iškilasis briaunainis. Jo viduje pasirenkame tašką O ir sudarome sferą $(O,\ R)$ su centru O. Jei $A_1A_2\ldots A_n$ yra kuri nors



25 pav.



26 pav.

briaunainio siena, tai daugiasienį kampą $OA_1A_2\ldots A_n$ atitinka sferinis n-kampis $B_1B_2\ldots B_n$ (26 pav.), nubraižytas sferoje (O, R). Išnagrinėję visas briaunainio sienas, gausime sferinį žemėlapį iš atitinkamų sferinių daugiakampių.

5 (Oilerio) teorema. ***Kiekvieno iškilojo briaunainio viršūnių skaičius V, briaunų skaičius B ir sienų skaičius S yra susieti lygybe***

$$V-B+S=2 \tag{5}$$

(ši lygybė vadinama Oilerio formule).

Pavyzdžiui, n-kampės piramidės $V=n+1$, $B=2n$, $S=n+1$ ir $V-B+S=(n+1)-2n+(n+1)=2$; n-kampės prizmės $V=2n$, $B=3n$, $S=n+2$ ir $V-B+S=2n-3n+(n+2)=2$. Oktaedro $V=6$, $B=12$, $S=8$ ir $V-B+S=6-12+8=2$.

Įrodymas. Norint įsitikinti, kad Oilerio formulė tinka bet kuriam iškilajam briaunainiui, sudaromas sferinis žemėlapis, projektuojant tą briaunainį į sferą, kaip aprašyta anksčiau. Sferos spindulį patogu laikyti lygiu 1.

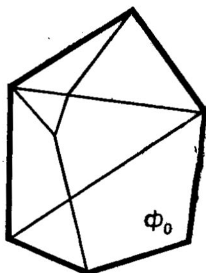
Iš briaunainio sudarę sferinį žemėlapį, sudėkime visų jo sferinių daugiakampių plotus. Gautoji suma turi būti lygi visos sferos plotui 4π $(R=1)$. Tą pačią sumą turime gauti, parašę kiekvieno daugiakampio plotą pagal (4) formulę ir sudėję gautuosius reiškinius. Sunumeruokime daugiakampius indeksu k nuo $k=1$ iki $k=S$; k-tojo daugiakampio viršūnių (arba kraštinių) skaičių pažymėkime n_k. Iš (4) formulės aišku, kad, atlikę nurodytą sudėtį, gausime dvi sumas $(R=1)$:

1) visų žemėlapio daugiakampių kampų sumą; kampų prie vienos viršūnės suma, aišku, lygi 2π; kadangi viršūnių skaičius lygus V, tai visa šita suma lygi $2\pi V$;

2) sumą $\sum\limits_{k=1}^{S} -(n_k-2)\pi=-(n_1+n_2+\ldots+n_S)\pi+2\pi S$ (pagalvokite!); suma $n_1+n_2+\ldots n_S$ rodo, kiek kraštinių turi visi sferiniai daugiakampiai, skaičiuojant kiekvieną kraštinę du kartus (ji priklauso dviem daugiakampiams). Savaime aišku, kad žemė-

lapio daugiakampių kraštinių skaičius lygus briaunainio briaunų skaičiui B. Todėl antroji suma lygi $-2B\pi+2\pi S$.

Įrodymo pradžioje buvo pasakyta, kad gautoji suma $2\pi V-2\pi B+2\pi S$ turi būti lygi 4π. Iš to ir išplaukia Oilerio formulė $V-B+S=2$.



27 pav.

Iš įrodymo aišku, kad Oilerio formulė tinka bet kuriam sferiniam žemėlapiui, kai S yra žemėlapio daugiakampių skaičius, B — bendras jų kraštinių skaičius, o V — visų viršūnių skaičius*. Dar vienas, planimetrinis, Oilerio formulės išvedimo būdas pateiktas 29 uždavinyje.

Pratimai

28. Sugalvokite neiškilą uždarą paviršių, sudarytą iš iškilųjų daugiakampių, kuriam nepritaikoma Oilerio formulė.

29. Jei į daugiakampį žiūrėsime iš jo išorės, iš taško, esančio pakankamai arti prie jo sienos Φ_0, tai visas kitas sienas matysime sienos Φ_0 viduje, t. y. daugiakampis Φ_0 atrodys padalytas į $S-1$ mažesnį daugiakampį (27 pav.).

Apskaičiuokite tų daugiakampių kampų sumą dviem būdais: iš pradžių, apskaičiavę kiekvieno daugiakampio kampų sumą, sudėkite gautas sumas, o paskui, apskaičiavę kampų prie vienos viršūnės sumą, sudėkite šias sumas. Palyginę gautus rezultatus, iš sudarytos lygybės išveskite Oilerio formulę.

30. Remdamiesi Oilerio formule, įrodykite, kad nėra briaunainio, kurio visos sienos turi po 6 ar daugiau kraštinių. Kitaip sakant, bent viena iškilojo briaunainio siena turi būti arba trikampis, arba keturkampis, arba penkiakampis.

§ 6. SFERINĖS GEOMETRIJOS TAIKYMAS NAVIGACIJAI

Navigacija (žodis kilęs iš lotyniško žodžio navigatio „plaukimas laivu") yra vienas seniausių mokslų. Paprasčiausius navigacijos uždavinius (pavyzdžiui, rasti trumpiausią maršrutą, parinkti plaukimo kryptį) reikėjo spręsti jau patiems pirmiesiems jūreiviams. Dabar šiuos ir kitus uždavinius tenka spręsti ne tik

---

* Pabrėžiame, kad formulė, vadinama Oilerio vardu, buvo žinoma iki jo. Oileris pamatė (tai jo nuopelnas), kad ta formulė tinka žemėlapiams, nubraižytiems bet kuriame paviršiuje, jei tas paviršius gaunamas, deformuojant sferą. Tai buvo topologijos — mokslo apie tokias deformacijas — pradžia.

jūreiviams, bet ir lakūnams, ir kosmonautams. Kai kurias navigacijos sąvokas ir uždavinius, glaudžiai susijusius su sferine geometrija, detaliai išnagrinėsime.

1 uždavinys. Žinome dviejų Žemės paviršiaus vietovių A ir B geografines koordinates — platumą ir ilgumą: φ_A, λ_A ir φ_B, λ_B. Reikia rasti trumpiausią atstumą nuo A iki B, matuojant Žemės paviršiuje (Žemės spindulys laikomas žinomu: $R=6371$ km).

Sprendimas. Iš pradžių priminsime, kad Žemės paviršiaus vietovės M platuma φ_M vadiname kampą, kurį spindulys OM (O — Žemės centras) sudaro su pusiaujo plokštuma; $-90° \leqslant \varphi_M \leqslant 90°$, be to, į šiaurę nuo pusiaujo platuma laikoma teigiama, o į pietus — neigiama (28 pav.). Vietovės M ilguma λ_M yra dvisienio kampo tarp plokštumų COM ir COH didumas, kai C — Šiaurės polius, o H — taškas, atitinkantis Grinvičo observatoriją; $-180° \leqslant \lambda_M \leqslant 180°$ (į rytus nuo Grinvičo dienovidinio ilguma laikoma teigiama, į vakarus — neigiama).

Jau žinome, kad trumpiausias atstumas tarp Žemės paviršiaus vietovių A ir B yra didžiojo apskritimo, einančio per A ir B, trumpesniojo lanko ilgis (tą lanką vadina *ortodrome*; žodis kilęs iš graikų kalbos ir reiškia „tiesų kelią“). Todėl uždavinys bus išspręstas, kai rasime sferinio trikampio ABC (C — Šiaurės polius) kraštinės AB ilgį.

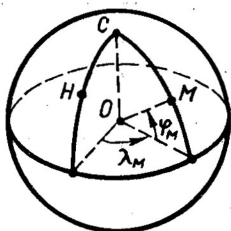
Trikampio ABC ir atitinkamo trisienio kampo $OABC$ elementus žymėdami standartiniais žymenimis, iš uždavinio sąlygų gauname: $\alpha=\widehat{COB}=90°-\varphi_B$, $\beta=90°-\varphi_A$ (29 pav.). Kampą $\hat{C}$ irgi nesunku išreikšti taškų A ir B koordinatėmis. Kadangi pagal apibrėžimą $\hat{C} \leqslant 180°$, tai arba $\hat{C}=|\lambda_A-\lambda_B|$, kai $|\lambda_A-\lambda_B| \leqslant 180°$, arba $\hat{C}=360°-|\lambda_A-\lambda_B|$, kai $|\lambda_A-\lambda_B|>180°$. Žinodami α, β ir $\hat{C}$, remiamės kosinusų teorema ir randame $\gamma=\widehat{AOB}$:

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\hat{C}=$$
$$=\sin\varphi_A\sin\varphi_B+\cos\varphi_A\cos\varphi_B\cos(\lambda_A-\lambda_B)$$

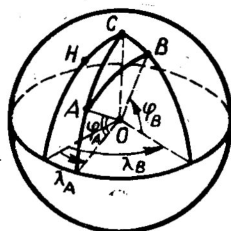
(paaiškinkite atliktus pertvarkymus). Žinodami $\cos\gamma$, randame kampą γ ir apskaičiuojame ieškomą atstumą:

$$|AB|_s=R\,\gamma.$$

2 uždavinys. Apskaičiuokite pradinį laivo kursą, plaukiant ortodrome iš A į B, kai žinomos tų taškų geografinės koordinatės φ_A, λ_A ir φ_B, λ_B.



28 pav.



29 pav.

S p r e n d i m a s. Pirmiausia patikslinsime sąlygą. Laivo kursu taške M vadinamas kampas, kurį sudaro dienovidinis, einantis per tašką M, su laivo išilgine plokštuma. Vadinasi, pradinis laivo kursas taške A yra kampas CAB (29 pav.).

Apskaičiuodami to kampo didumą, taikysime kosinusų teoremą sferiniam trikampiui ABC:

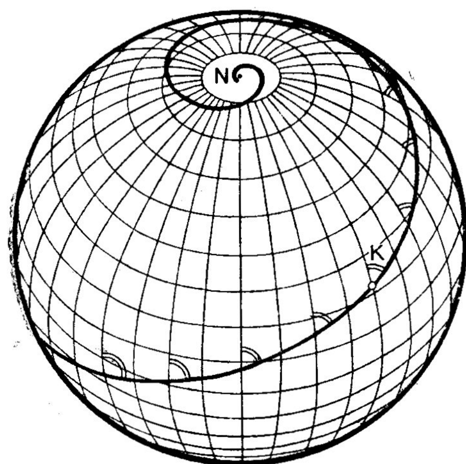
$$\cos \widehat{COB} = \cos \widehat{COA} \cos \widehat{AOB} + \sin \widehat{COA} \sin \widehat{AOB} \cos \widehat{A}.$$

Įrašę rastąją $\cos\gamma$ reikšmę (žr. 1 uždavinį), gauname

$$\cos \widehat{A} = \frac{\sin\varphi_B - \sin\varphi_A(\sin\varphi_A \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos(\lambda_A - \lambda_B))}{\cos\varphi_A \sin\gamma}.$$

Nors ortodromė yra trumpiausias kelias sferoje, bet lėktuvai ir laivai juda kitais maršrutais. Mat ortodromė, nesutampanti nei su dienovidinio, nei su pusiaujo lanku, skirtingus dienovidinius kerta skirtingais kampais. Todėl, judant ortodrome, reikia nuolat keisti kursą. Tai praktiškai neįmanoma padaryti. Daug paprasčiau plaukti pastoviu kursu. Kreivės, kurios visus dienovidinius kerta tuo pačiu kampu, vadinamos *loksodromėmis* (iš graikų žodžio, reiškiančio „įžambų kelią"). 30 paveiksle pavaizduota loksodromė, kuri visus dienovidinius kerta 70° kampu.

Savaime aišku, kad, judant loksodrome, kelias pailgėja. Tačiau, kai vietovės A ir B yra palyginti netoli viena nuo kitos, tai kelias pailgėja, lyginant jį su ortodrome AB, gana mažai. O kai sferinis atstumas $|AB|_s$ didelis, nuostoliai dėl judėjimo loksodrome gali labai padidėti. Tokiu atveju daroma šitaip: randama ortodromė, jungianti A su B, apskaičiuojamos keleto tarpinių taškų $A_0 = A$, $A_1, \ldots, A_n = B$ koordinatės, nustatomas kursas loksodromėmis, jungiančiomis A_0 su A_1, A_1 su A_2, ..., ir judama, laikantis atitinkamo kurso. Aišku, kuo daugiau bus tarpinių ortodromės taškų, tuo mažiau tas maršrutas skirsis nuo ortodromės (jūreivys-



30 pav.

tės praktikoje tarpinių taškų ilgumas dažniausiai skiriasi 10°).

Nužyminti kursą aprašytuoju būdu, būtina išspręsti keletą uždavinių. Štai vienas tų uždavinių.

3 uždavinys. Raskite priklausomybę, iš kurios, žinant taškų A ir B koordinates, galima apskaičiuoti tarpinių ortodromės AB taškų koordinates. (Kitaip sakant, reikia sudaryti ortodromės, jungiančios taškus A ir B, lygtį.)

Sprendimas. Pirmiausia atkreipsime dėmesį į tai, kad tuo atveju, kai abu taškai priklauso vienam dienovidiniui arba pusiaujui, ortodromės lygtį parašyti lengva: $\lambda = \text{const}$ arba $\varphi = 0°$. Kitais atvejais ortodromė kerta pusiaują kuriame nors taške A_0. Taško A_0 ilgumą pažymėkime λ_0 ir sakykime, kad ortodromė AB su pusiauju sudaro kampą K_0. Pirmiausia išvesime ortodromės lygtį, skaičius λ_0 ir K_0 laikydami žinomais.

Sakykime, $X(\varphi, \lambda)$ — bet kuris tos ortodromės taškas, o Y — dienovidinio, einančio per tašką X, ir pusiaujo susikirtimo taškas. Nubraižykime statųjį trikampį A_0XY ir išnagrinėkime jį.

Pagal sinusų teoremą

$$\frac{\sin \widehat{A}_0}{\sin \varphi} = \frac{\sin \widehat{Y}}{\sin A_0\widehat{O}X}.$$

Kadangi $\widehat{Y} = 90°$, tai skirtumą $\lambda - \lambda_0$ žymėdami raide β, o kampą $A_0\widehat{O}X$ — raide γ, gauname

$$\sin \widehat{A}_0 = \cos \widehat{K}_0 = \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma}. \quad (1)$$

Pagal kosinusų teoremą

$$\cos \varphi = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \widehat{A}_0,$$

todėl

$$\cos \widehat{A}_0 = \sin \widehat{K}_0 = \frac{\cos \varphi - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \gamma \sin \beta}. \quad (2)$$

Iš (1) ir (2) lygybių gauname

$$\operatorname{tg} \widehat{A}_0 = \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \gamma \sin \beta}{\cos \varphi - \cos \beta \cos \gamma}.$$

Pagal sferinę Pitagoro teoremą

$$\cos \gamma = \cos \beta \cos \varphi,$$

todėl

$$\operatorname{ctg} \widehat{K}_0 = \operatorname{tg} \widehat{A}_0 = \frac{\sin \varphi \sin \beta}{\cos \varphi - \cos^2 \beta \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \beta}.$$

Vadinasi, gavome kryptinę ortodromės lygtį

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \widehat{K}_0 \sin(\lambda - \lambda_0), \qquad (3)$$

iš kurios galima išvesti jos lygtį, kai duoti du ortodromės taškai $A(\lambda_1, \varphi_1)$ ir $B(\lambda_2, \varphi_2)$. Tam reikalui užtenka išspręsti dviejų lygčių su nežinomaisiais $\widehat{K}_0$ ir λ_0 sistemą. Iš tikrųjų, taškų A ir B koordinatės tenkina (3) lygtį, todėl

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{ctg} \widehat{K}_0 \sin(\lambda_1 - \lambda_0), \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{ctg} \widehat{K}_0 \sin(\lambda_2 - \lambda_0). \qquad (5)$$

Iš tų dviejų lygybių gauname

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_0) - \sin(\lambda_2 - \lambda_0)}{\sin(\lambda_1 - \lambda_0) + \sin(\lambda_2 - \lambda_0)} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0 \right)}{2 \sin \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0 \right) \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0 \right) \operatorname{tg} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Kadangi

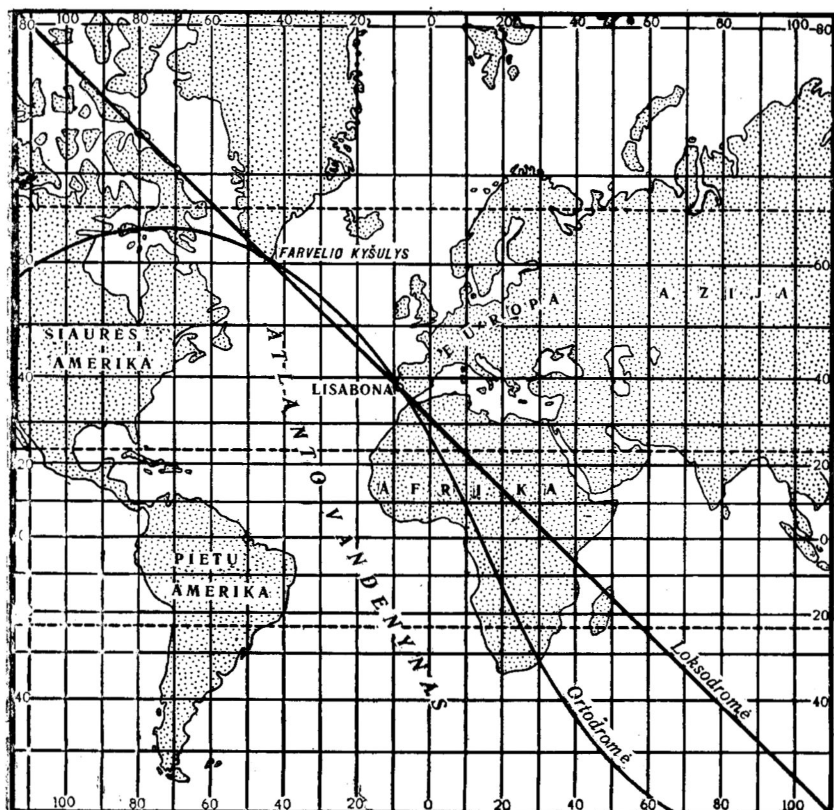
$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

tai

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0 \right) \operatorname{tg} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Iš paskutinės lygybės randame λ_0, o iš (4) arba (5) lygybės — kampą $\widehat{K}_0$.

Išsprendus 3 uždavinį, galima rasti ortodromės, jungiančios $A(\lambda_1, \varphi_1)$ su $B(\lambda_2, \varphi_2)$, taškų koordinates. Tačiau norint nužymėti kursą iš A į B, reikia mokėti spręsti dar vieną uždavinį: žinant taškų A ir B koordinates, rasti laivo kursą, kai jis plaukia loksodrome AB. Sprendžiant šį uždavinį, galima išvesti loksodromės



31 pav.

AB lygtį (žr. 33 uždavinį). Tačiau yra ir kitas, paprastesnis, būdas.

Tas būdas susijęs su kita navigacijos problema, su tinkamiausių navigacijai žemėlapių parinkimu. Kadangi, nužymint kursą, svarbiausias vaidmuo skiriamas kampams, tai pirmas reikalavimas, kurį turi tenkinti navigacijoje naudojami žemėlapiai, yra šis: kampai tarp kreivių sferoje turi būti lygūs juos atitinkantiems kampams žemėlapyje. Kadangi laivų trajektorijos Žemės paviršiuje dažniausiai yra sudarytos iš loksodromių, tai pageidaujama, kad loksodromės navigaciniuose žemėlapiuose būtų vaizduojamos kuo paprasčiau, geriausiai — atkarpomis.

Žemėlapiai, atitinkantys tuodu reikalavimus, egzistuoja. Pirmasis juos sudarė flamandų kartografas Merkatorius maždaug prieš 400 metų (31 paveiksle pateiktas tokio žemėlapio pavyzdys).

Uždaviniai, susiję su žemėlapių sudarymu, irgi sprendžiami, remiantis sferine geometrija. Kai kuriuos iš tų uždavinių išnagrinėsime kitame paragrafe.

Pratimai

31. Raskite ledlaužio nueitą kelią, kai jis iš vietovės $A(70°, 30°)$ į vietovę $B(70°, -170°)$ plaukia a) loksodrome; b) ortodrome.

32. Raskite atstumą nuo Šiaurės poliaus iki ortodromės, jungiančios taškus A ir B, kurių koordinatės nurodytos 31 uždavinio sąlygoje. (Atstumas nuo taško iki figūros sferoje apibrėžiamas taip pat, kaip ir plokštumoje.)

33. Apskaičiuokite laivo kursą, kai jis plaukia loksodrome iš Lisabonos į Farvelio kyšulį (31 pav.).

34. Raskite miesto arba kaimo, kuriame jūs gyvenate, geografines koordinates.

35. Lėktuvas skrenda ortodrome iš Maskvos į Chabarovską. Ar jis praskrenda virš Baikalo ežero?

§ 7. KARTOGRAFINĖS PROJEKCIJOS

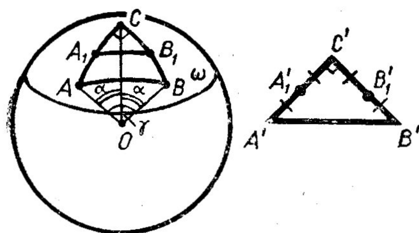
Jau sakėme, kad, sprendžiant daugelį praktikos uždavinių, Žemę patogu laikyti rutuliu. Sumažinę tą rutulį maždaug 10 milijonų kartų ir jo paviršiuje pavaizdavę žemynų, vandenynų, ežerų, upių ir t. t. kontūrus, gausime gaublį. Tačiau naudotis gaubliu toli gražu ne visada patogu. Pagrindinis kartografijos uždavinys — gaublio paviršių kuo tiksliau pavaizduoti plokštumoje. Spręsdami šį uždavinį, susiduriame su daugeliu sunkumų, kurie verčia ieškoti įvairiausių būdų žemėlapiams sudaryti.

Pagrindinę šių sunkumų priežastį galima paaiškinti vaizdžiu pavyzdžiu. Pamėginkime guminio sviedinio ar stalo teniso kamuoliuko gabalėlį, kad ir labai mažą, sutapdinti su stalo paviršiumi. To padaryti nepavyks, gabalėlio neperlaužus, neištempus arba vienos dalelės neužklojus kita. Matematine kalba tai išreiškiama šiuo teiginiu.

6 teorema. ***Jei sferos poaibis ω apima sferinę nuopjovą, tai poaibio ω neįmanoma atvaizduoti į plokščią figūrą, nepakeitus atstumų.***

Įrodymas. Sakykime, kad yra atstumų nekeičiantis atvaizdis f, kuriuo sferos dalelė ω atvaizduojama į plokščią figūrą, t. y. imant bet kuriuos taškus $A \in \omega$ ir $B \in \omega$,

$$|f(A)f(B)| = |AB|_S.$$



32 pav.

Išnagrinėsime statų lygiašonį trikampį ABC, nubraižytą dalelėje ω, ir jo vaizdą plokštumoje, gautą atvaizdžiu f. Sakykime $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$ (32 pav.). Kadangi f nekeičia atstumų, tai statinių AC ir BC vidurio taškų A_1 ir B_1 vaizdai A'_1 ir B'_1 yra atkarpų $A'C'$ ir $B'C'$ vidurio taškai. Pagal plokščiojo trikampio vidurinės linijos teoremą $|A'_1B'_1|=\frac{1}{2}|A'B'|$. Kadangi $|A'B'|=|AB|_s$, $|A'_1B'_1|=|A_1B_1|_s$, tai

$$|A_1B_1|_s=\frac{1}{2}|AB|_s. \qquad (1)$$

Plokščiųjų kampų, kurių viršūnė yra sferos centras O ir kurie remiasi į statinius AC ir BC, didumą pažymėkime α ir tarkime, kad $A\widehat{O}B=\gamma$. Tuomet iš (1) lygybės išplaukia, **kad** $A_1\widehat{O}B_1=\frac{\gamma}{2}$. Iš stačiųjų lygiašonių sferinių trikampių ABC ir A_1B_1C, remdamiesi sferine Pitagoro teorema, rašome dvi lygybes:

$$\cos\gamma=\cos^2\alpha, \qquad (2)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Iš (2) lygybės gauname

$$1+\cos\gamma=1+\cos^2\alpha,$$

$$2\cos^2\frac{\gamma}{2}=1+\cos^2\alpha. \qquad (4)$$

Iš (3) lygybės, abi jos puses pakėlę kvadratu ir padauginę iš 2, gauname

$$2\cos^2\frac{\gamma}{2}=2\cos^4\frac{\alpha}{2}. \qquad (5)$$

Dabar (4) ir (5) lygybių dešiniąsias puses sujungiame lygybės ženklu:

$$1+\cos^2\alpha=2\cos^4\frac{\alpha}{2}. \qquad (6)$$

Lengva įsitikinti, kad (6) lygybė teisinga tik tada, kai $\alpha=0°$. Iš to aišku, kad lygybė $|A_1B_1|_s=\frac{1}{2}|AB|_s$, kurią išvedėme, tarę, jog f nekeičia atstumų, nėra teisinga. Vadinasi, neteisinga ir prielaida, teigianti, kad egzistuoja nekeičiantis atstumų sferos dalelės ω atvaizdis f į plokščią figūrą.

Įrodyta savybė vadinama sferos neišklojamumo savybe: nė vieno sferos gabalo neįmanoma „išlenkti" ir iškloti ant plokštumos, kaip, sakysime, cilindrinio ar kūginio paviršiaus. Iš 6 teoremos aišku, kad, Žemės paviršiaus dalį vaizduodami plokštumoje, visada neišvengiamai iškraipome atstumus. Todėl, pavyzdžiui, matuojant atstumą tarp taškų žemėlapyje, neįmanoma rasti atstumo tarp atitinkamų Žemės paviršiaus taškų: tai duoda dideles paklaidas.

Vis dėlto sukurti žemėlapių sudarymo metodai padeda sėkmingai spręsti daugelį atskirų uždavinių. Pavyzdžiui, yra žemėlapių, iš kurių dideliu tikslumu randami plotai. Kaip jau sakėme šeštame paragrafe, vaizduojant sferos dalis Merkatoriaus projekcija, nekinta kampai (tokie atvaizdžiai vadinami konformiškais). Svarbus konforminio atvaizdžio pavyzdys yra stereografinė projekcija.

Pasirenkame bet kurį sferos tašką S ir per tašką S', diametraliai priešingą taškui S, išveskime tos sferos liečiamąją plokštumą α (33 pav.). Jei M yra sferos taškas, tai tiesė SM kerta plokštumą α kuriame nors taške M'. Atvaizdis, kuriuo kiekvienam sferos taškui M nurodytu būdu priskiriamas plokštumos α taškas M', yra tos sferos (be taško S) atvaizdis į visą plokštumą α (kodėl?). Tas atvaizdis vadinamas *stereografine projekcija.*

Išnagrinėsime dvi pagrindines stereografinės projekcijos savybes.

7 teorema. ***Kiekvienas apskritimas, kuris neina per stereografinės projekcijos centrą S, šia projekcija atvaizduojamas į apskritimą.***

Įrodymas. Pirmiausia pabrėžiame, kad, imant bet kurį sferos tašką $M \neq S$, bus teisinga lygybė

$$|SM| \cdot |SM'| = 4R^2. \qquad (1)$$

Iš tikrųjų (33 pav.), kadangi $S'M'$ liečia sferą (O, R), tai $\widehat{SS'M'} = 90°$. Be to, $\widehat{S'MS} = 90°$, nes šis kampas remiasi į sferos skersmenį. Remdamiesi žinoma stačiojo trikampio statinio savybe, gauname (1) lygybę.

Pagrindinė tolesnio samprotavimo idėja yra tokia. Nagrinėsime visos erdvės (be taško S) atvaizdį F į visą erdvę, kuriuo kiekvienas taškas M atvaizduojamas į spindulio SM tašką M', tenkinantį lygybę $|SM| \cdot |SM'| = 4R^2$. Jeigu įrodysime, kad šiuo atvaizdžiu kiekviena sfera, neinanti per S, atvaizduojama į sferą, tai teorema bus įrodyta. Iš tikrųjų, kiekvienas sferoje nubrėžtas

33 pav.

34 pav.

35 pav.

apskritimas yra tos sferos ir kurios nors kitos sferos (K, r) sankirta (34 pav.). Todėl to apskritimo vaizdas, gautas atvaizdžiu F, yra šitų sferų vaizdų sankirta. Tačiau jau žinome, kad sferos (O, R) be taško S vaizdas yra plokštuma α. Vadinasi, sferos (K, r) vaizdas yra sfera, kertanti plokštumą α. Kadangi plokštumos ir sferos sankirta yra apskritimas, tai teorema įrodyta.

Vadinasi, užtenka įrodyti, kad kiekviena sfera, kuriai nepriklauso taškas S, atvaizduojama į sferą.

Taškus, kuriuose tiesė SK kerta sferą (K, r), pažymėsime raidėmis A ir B, o tų taškų vaizdus — raidėmis A' ir B' (35 pav.). Nagrinėkime bet kurį sferos (K, r) tašką C ir jo vaizdą C'. Pabrėžiame, kad kampas ABC yra status (jis remiasi į skersmenį).

Pagal atvaizdžio F apibrėžimą turi būti $|SA|\cdot|SA'| = |SC|\cdot|SC'|$, todėl

$$\frac{|SA|}{|SC|}=\frac{|SC'|}{|SA'|}.$$

Vadinasi, trikampis SAC yra panašus į trikampį $SA'C'$ (pagal kampą ir dvi proporcingas kraštines). Todėl

$$\widehat{SAC}=\widehat{SC'A'}. \qquad (2)$$

Analogiškai, nagrinėdami panašius trikampius SBC ir $SC'B'$, įsitikiname, kad

$$\widehat{SBC}=\widehat{SC'B'}. \qquad (3)$$

Kampas SAC yra trikampio ACB priekampis, todėl

$$A\widehat{C}B = S\widehat{A}C - S\widehat{B}C.$$

Dėl tos pačios priežasties

$$B'\widehat{C'}A' = S\widehat{C'}A' - S\widehat{C'}B'.$$

Kadangi $A\widehat{C}B = 90°$, tai, atsižvelgę į (2) ir (3) lygybes, iš čia įsitikiname, kad

$$B'\widehat{C'}A' = 90°.$$

Paskutinė lygybė rodo, kad kiekvieno sferos (K, r) taško vaizdas priklauso sferai, kurios skersmuo yra $A'B'$. Be to, kiekvienas gautos sferos (kurios skersmuo yra $A'B'$) taškas P yra kurio nors sferos (K, r) taško P vaizdas (taško $F(P)$; paaiškinkite, kodėl). Vadinasi, atvaizdžiu F sfera (K, r) atvaizduojama į sferą: Teorema įrodyta.

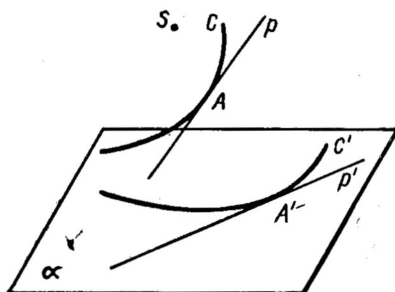
Stereografinės projekcijos savybė, išreikšta 7 teorema, vadinama skrituline savybe. Dabar įrodysime, kad stereografinė projekcija yra konforminis atvaizdis.

8 teorema. ***Stereografinė projekcija nekeičia kampų tarp kreivių.***

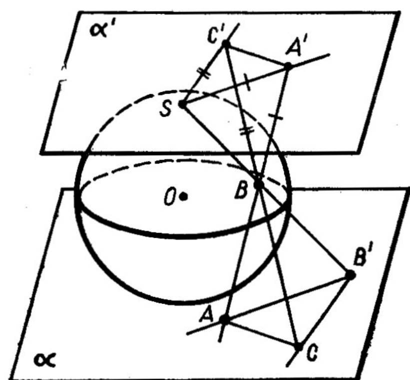
Įrodymas. Sakykime, tiesė p liečia sferinę kreivę C taške A. Jei tiesė p' yra tiesės p projekcija iš centro S į plokštumą α, o C' — kreivės C vaizdas, gautas stereografine projekcija, tai tiesė p' liečia kreivę C' taške A' (A' — taško A vaizdas). Kad tas teiginys teisingas, galima įsitikinti, įsivaizdavus, jog projekcijos centre S yra šviesos šaltinis, o kreivė C ir tiesė p pagamintos iš vielos: tuomet tiesė p', tiesės p šešėlis, liečia C', kreivės C šešėlį (36 pav.).

Remdamiesi šita prielaida, įrodysime suformuluotą teoremą.

Sakykime, kad BA ir BC yra kreivių, nubraižytų sferoje (O, R) ir einančių per tašką B, liestinės. Tiesės BA ir BC, aišku, liečia ir sferą. Taškus A ir C bus patogu laikyti tų liestinių ir plokštumos α sankirtos taškais.



36 pav.



37 pav.

Reikia įrodyti, kad kampas $AB'C$, gautas projektuojant kampą ABC iš taško S į plokštumą α, yra kongruentus kampui ABC.

Per tašką S išvedame sferos (O, R) liečiamąją plokštumą α'. Sakykime, kad tiesės AB ir BC kerta plokštumą α' taškuose A' ir C' (37 pav.). Plokštumos α ir α', liečiančios sferą (O, R) diametraliai priešinguose taškuose S ir S', yra lygiagrečios. Todėl kampai $AB'C$ ir $C'SA'$ yra homotetiški (homotetijos centras — taškas B), taigi ir kongruentūs: $\angle AB'C \cong \angle C'SA'$. Antra vertus, $\angle ABC \cong \angle C'BA'$, nes šie kampai kryžminiai. Vadinasi, teorema bus įrodyta, kai įsitikinsime, jog

$$\angle C'SA' \cong \angle C'BA'.$$

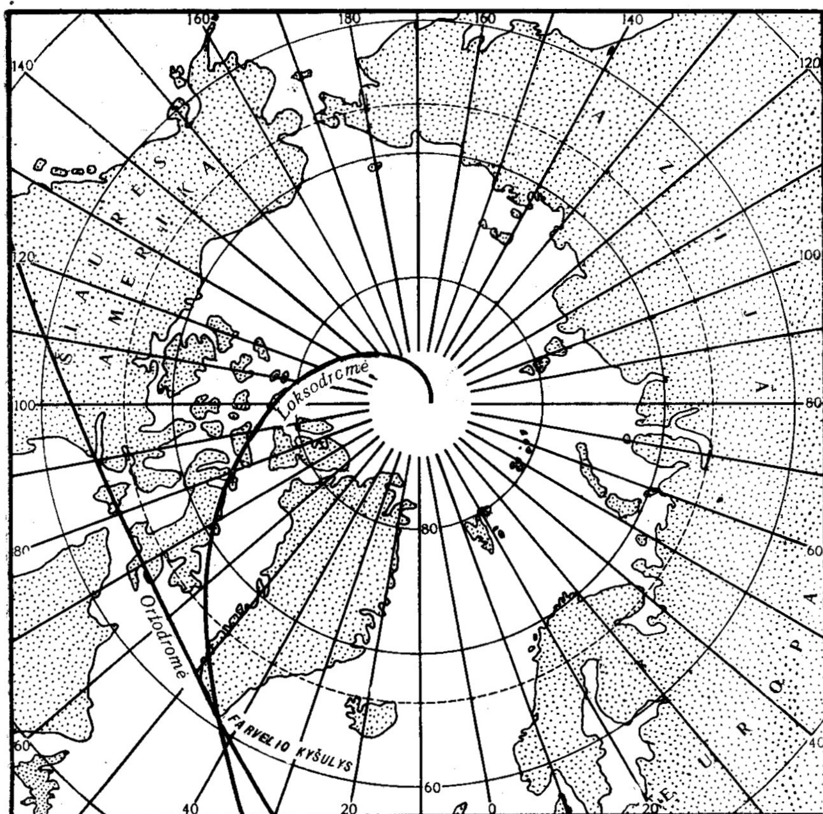
Žinome, kad sferos liestinių atkarpos, nubrėžtos iš vieno taško iki sferos, yra kongruenčios. Todėl

$$|A'S| = |A'B|, \ |C'S| = |C'B|.$$

Vadinasi, trikampių $SA'C'$ ir $BA'C'$ kraštinės atitinkamai kongruenčios ($[A'C']$ — bendra kraštinė), todėl jie kongruentūs. Iš to išplaukia kampų $C'SA'$ ir $C'BA'$ kongruentumas.

Kadangi stereografinė projekcija yra konforminis atvaizdis, tai ją patogu taikyti kartografijoje. Pavyzdžiui, 38 paveiksle pavaizduotasis žemėlapis nubraižytas, taikant stereografinę projekciją (projekcijos centras — Pietų polius).

8 teorema padeda išaiškinti, kaip sudaroma Merkatoriaus projekcija. Projektuojant gaublį stereografiškai, kampai nekinta, bet kai kurios loksodromės, pavyzdžiui, lygiagretės, atvaizduojamos ne į atkarpas, bet į apskritimus. Jei pavyktų rasti plokštumos atvaizdį, nekeičiantį kampų ir turimą lygiagrečių bei dienovidinių tinklą atvaizduojantį į stačiakampį tinklą, tai ir antras reikalavimas, keliamas navigaciniams žemėlapiams (loksodromės vaizdas — atkarpa), irgi būtų įvykdytas. Toks konforminis atvaizdis rastas kompleksinio kintamojo funkcijų teorijoje. Jį galima nusakyti šitaip.



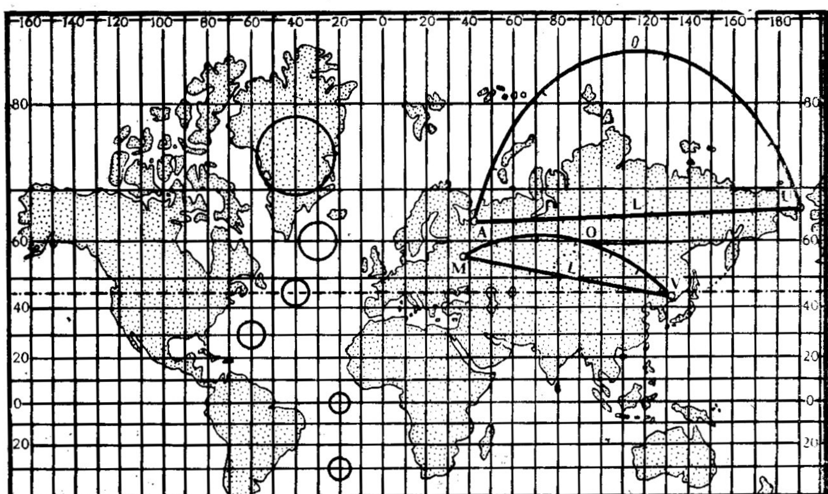
38 pav.

Imkime Šiaurės pusrutulio žemėlapį, gautą stereografine projekcija su centru Pietų poliuje. Bet kurį žemėlapio tašką M galima nurodyti dviem skaičiais: atstumu ϱ nuo pavaizduoto Šiaurės poliaus ir taško M ilguma φ. Kiekvienam taškui $M(\varrho, \varphi)$ priskiriame stačiakampės koordinačių sistemos tašką $M'(x, y)$:

$$x=\varphi, \quad y=\ln \varrho.$$

Kompleksinio kintamojo funkcijų teorijoje įrodoma, kad šis atvaizdis nekeičia kampų. Be to, aišku, kad tokiu atveju lygiagrečių (ϱ=const) ir dienovidinių (φ=const) tinklas atvaizduojamas į stačiakampį tinklą, o to ir reikėjo.

Žemėlapį, sudarytą, taikant Merkatoriaus projekciją, galima gauti ir be išankstinio stereografinio projektavimo. Parodysime,



39 pav.

pavyzdžiui, kaip sudaryti tokį sričių, esančių prie pusiaujo, žemėlapį.

Metodas pagrįstas tuo, kad cilindrinį paviršių galima iškloti plokštumoje. Sudarykime cilindrinį paviršių, liečiantį sferą. Nupjovus sritis apie polius, likusią sferos dalį galima suprojektuoti iš jos centro į cilindrinį paviršių. Perpjauname cilindrinį paviršių išilgai sudaromosios ir išklojame plokštumoje (39 pav.). Savaime aišku, kad lygiagrečių ir dienovidinių tinklas bus atvaizduotas į stačiakampį tinklą. Tiesą sakant, kampai šiuo atveju pasikeičia, bet galime nurodyti ir konforminį sferos dalies atvaizdį į plokštumą — Merkatoriaus projekciją. Ši kartografinių projekcijų rūšis vadinama cilindrine lygiakampe projekcija.

Pratimai

36. a) Kokia figūra yra ortodromė (žr. 38 pav.)? Ar pasieks Šiaurės polių lėktuvas, skrendantis loksodrome (žr. 38 pav.)?

37. Yra žinoma, kad Grenlandijos plotas yra mažesnis už Pietų Amerikos plotą. Žiūrėdami į 39 paveikslą, to pasakyti negalime. Kaip paaiškinti šį prieštaravimą?

Atsakymai, nurodymai ir sprendimai

1. Žr. „Geometriją IX—XI klasei“, 683 uždavinys.

2. Taškas, du taškai, apskritimas, tuščia aibė.

3. Reikia remtis vienodo spindulio apskritimų stygų ir jų lankų savybėmis.

4. a) Galima įrodyti matematinės indukcijos metodu (pagal n), remiantis trikampio nelygybe; b) neteisingas; žr. 40 paveikslą.

5. a) Iš eilės pratęsdami vidinio daugiakampio kraštines, iškertame gaunamas dalis (1, 2, ...; žr. 41 paveikslą) nuo išorinio daugiakampio. Šitaip gauname kaskart mažesnių matmenų daugiakampius, kol galų gale lieka tik vidinis daugiakampis.

b) Neteisingas; iš 42 paveikslo aišku, kad vidinis daugiakampis gali turėti kiek norima didelį perimetrą.

c) Teisingas, nes atvejo a) samprotavimas pritaikomas ir šiam atvejui.

6. Netiesa; išnagrinėkite, pavyzdžiui, trikampį gaublio paviršiuje, kurį sudaro pusiaujas ir du dienovidiniai.

7. Ta teorema teisinga, išskyrus atvejį, kai per „polių“ brėžiamas statmuo į „pusiaują“.

8. Teisingas; tai išplaukia iš 3 uždavinyje suformuluoto teiginio.

9. $r = R \sin \frac{\rho}{R}$.

10. Pasirenkame sferinio apskritimo, kurio centras Q, tris taškus A, B ir C. Iš trijų kraštinių nubraižę plokštumoje trikampį ABC, surandame to apskritimo spindulį r. Turėdami ilgio r atkarpą ir stygą QA, nubrėžiame skersmenį QQ'.

11. Nubrėžiame didžiuosius apskritimus, kurių centrai yra duotuosiuose taškuose, jų spinduliai lygūs $R\sqrt{2}$, o sankirtos taškai — ieškomojo apskritimo centrai.

12. a) ir b) — tiesa.

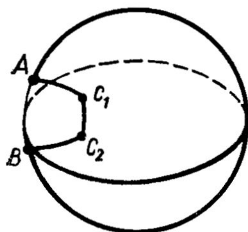
13. $\gamma = 60°$; atsakymą lengva gauti be kosinusų teoremos: užtenka tą kampą įbrėžti į kubą (43 pav.).

14. $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

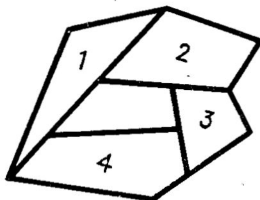
15. Iš polinio kampo apibrėžimo aišku, kad spindulys OA statmenas spinduliams OB^* ir OC^*; todėl jis statmenas ir plokštumai OB^*C^*. Analogiškai $(OB) \perp (OA^*C^*)$, $(OC) \perp (OA^*B^*)$.

16. $\alpha^* = \pi - \alpha$, $\beta^* = \pi - \beta$, $\gamma^* = \pi - \gamma$; $\widehat{A}^* = \pi - \widehat{A}$, $\widehat{B}^* = \pi - \widehat{B}$, $\widehat{C}^* = \pi - \widehat{C}$.

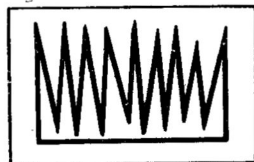
17. Reikia remtis redukcijos formulėmis.



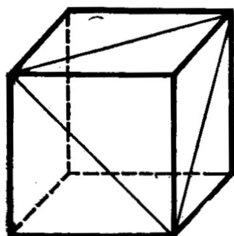
40 pav.

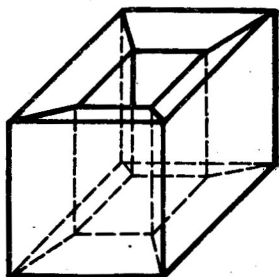


41 pav.



42 pav.


43 pav.


44 pav.

18. $\pi<\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}<3\pi$; įrodant reikia remtis 16 uždavinio formulėmis ir 15 uždavinio teiginiu.

19. $(f_3 \circ f_2) \circ f_1)(M)=(f_3 \circ f_2)(f_1(M))=f_3(f_2(f_1(M)))=f_3((f_2 \circ f_1)(M))=$ $=(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(M)$.

20. Galima imti $f=S_\alpha$, $g=S_\beta$, kai plokštumos α ir β nėra statmenos.

21. Kompozicija yra lygiagretusis postūmis.

22 ir 23. Posūkius reikia išreikšti tokių simetrijų kompozicijomis $S_\alpha \circ S_\beta$ ir $S_\beta \circ S_\gamma$, kad viena simetrijos plokštuma (β) būtų bendra. Tuomet posūkių kompozicija išreiškiama šitaip:

$$(S_\alpha \circ S_\beta) \circ (S_\beta \circ S_\gamma)=S_\alpha \circ (S_\beta \circ S_\beta) \circ S_\gamma=$$
$$=S_\alpha \circ E \circ S_\gamma=S_\alpha \circ S_\gamma.$$

Todėl kompozicija bus posūkis apie plokštumų α ir γ sankirtos tiesę. 22 uždavinyje plokštumos α, β ir γ yra viena kitai statmenos.

24. a) Fiksuotą sieną galima atvaizduoti į bet kurią iš keturių sienų, be to, šešiais būdais; todėl iš viso bus 24 poslinkiai. b) 48 poslinkiai.

25. Ašies k ir sferos sankirtos taškai apibrėžti vienareikšmiškai, nes jie poslinkiu f atvaizduojami vienas į kitą; todėl plokštuma α irgi apibrėžta vienareikšmiškai.

26. Reikia pasinaudoti 16 uždavinio rezultatu.

27. Didžiausias atstumas tarp sferos (O, R) taškų lygus $2R$, todėl sferos panašumo transformacijos su koeficientu $k\neq 1$ nėra.

28. Paviršiaus, pavaizduoto 44 paveiksle („plyta su skyle"), $V=16$, $B=32$, $S=16$; šiuo atveju $V-B+S=0\neq 2$.

29. Reikia remtis tuo, kad n-kampio kampų suma lygi $(n-2)\pi$, o kampų prie vienos viršūnės išorinio daugiakampio viduje lygi 2π.

30. Vidutinis briaunų skaičius, tenkantis vienai sienai, lygus $n=\frac{2B}{S}$. Lengva įsitikinti, kad $2B\geqslant 3V$; todėl $3(B-V)\geqslant B$. Pagal Oilerio formulę $B-V=S-2$; todėl $3(S-2)\geqslant B$, o iš čia

$$n=\frac{2B}{S}\leqslant\frac{6(S-2)}{S}=6-\frac{12}{S}<6.$$

TURINYS

Aleksandras Michailovičius Abramovas, Naumas Jakovlevičius Vilenkinas, Georgijus Vladimirovičius Dorofejevas, Andrejus Aleksandrovičius Jegorovas, Aleksandras Nikolajevičius Zemliakovas, Aleksandras Grigorjevičius Mordkovičius
RINKTINIAI MATEMATIKOS KLAUSIMAI
Fakultatyvinis kursas X—XI kl.
Originalą redagavo *V. Firsovas*
Sudarė *S. Švarcburdas*

Redaktorė *N. Ramanauskienė.* Viršelis *Z. Šalienės*
Men. redaktorė *Z. Šalienė*
Techn. redaktorė *I. Kondreckienė.* Korektorė *R. Vaitilavičienė*
Vertimą recenzavo *Juozas Mačys*

Александр Михайлович Абрамов, Наум Яковлевич Виленкин, Георгий Владимирович Дорофеев, Андрей Александрович Егоров, Александр Николаевич Земляков, Александр Григорьевич Мордкович
ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ
Факультативный курс, X—XI кл.
Оригинал под ред. *В. В. Фирсова* Составитель *С. И. Шварцбурд.*
Перевел с русского *Пятрас Румшас*
Оригинал рекомендован Главным управлением школ Министерства просвещения СССР
На литовском языке
Литовская ССР, 233000, Каунас, пр. Ленина, 25, издательство «Швиеса»

ИБ № 1656
Duota rinkti 83.05.11. Pasirašyta spausdinti 83.09.19. Formatas 60×90[1]/16. Popierius spaudos Nr. 1. Literatūrinė garnitūra, 10 punktų. Iškilioji spauda. 12,25 sąl. sp. l., 11,19 leid. l. Tiražas 5 000 egz. Užsakymo Nr. 2832. Leid. Nr. 9722. Kaina 55 kp.
Leidykla „Šviesa", 233000 Kaunas, Lenino pr. 25
Spausdino V. Kapsuko-Mickevičiaus spaustuvė, 233000 Kaunas, Lenino pr. 23